Matrices of cell representations in affine type G_2.

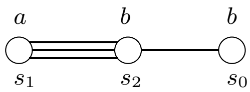
Jérémie Guilhot, James Parkinson

Abstract

We construct representations afforded by finite cells in affine type G_2 for all choices of parameters.

Introduction

Let W be an affine Weyl group of type $\tilde{G}_2$ with diagram and weight function defined by



In this note we construct all the possible finite dimensional representation afforded by cells in type G_2.

1 Finite dimensional representation

We introduce the following notation:

We set $u := q^b$, $v = q^a$ and for all $i, j \in \mathbb{Z}$, we set $\mu_{i,j} := u^{-i}v^j + u^i v^{-j}$

In the following array, we describe all the finite dimensional representation that appear in the generic cases.

	T_{s_1}	T_{s_2}	T_{s_0}
$2 > r > \frac{3}{2}$	$\begin{pmatrix} v & \mu_{1,1} & 0 & 1 & -\mu_{3,2} \\ 0 & -v^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v & \mu_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u & 1 & -\mu_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u \end{pmatrix}$
$r > 1$	$\begin{pmatrix} v & \mu_{1,1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -v^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v & \mu_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u \end{pmatrix}$
$1 > r$	$\begin{pmatrix} -v^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -v^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u & 1 & \pm 1 + \mu_{1,1} \\ 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$
$r > 3/2$	$\begin{pmatrix} -v^{-1} & 0 \\ 0 & -v^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 \\ 1 & u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$
$3/2 > r$	$\begin{pmatrix} -v^{-1} & 0 \\ 0 & -v^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u & 1 \\ 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 \\ 1 & u \end{pmatrix}$
$r > 2$	$(-v^{-1})$	(u)	(u)
$3/2 > r$	(v)	$(-u^{-1})$	$(-u^{-1})$

The matrices associated to the red cell that contains s_1 in the equal parameter case are

$$\begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix}$$

The matrices associated to the red cell that contains s_2 in the equal parameter case are

$$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u \end{pmatrix}$$

The matrices associated to the red cell that contains s_0 in the equal parameter case are

$$\begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & u & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & u \end{pmatrix}$$

2 Asymptotic algebra associated to finite cell

In the case of equal parameters, the red cells Γ_3 decomposes into 3 right cell $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_0$ that are defined by

$$\Upsilon_i := \{w \in \Gamma_3 \mid s_i w < w\}.$$

Let ρ_i be the representation associated to Υ_i.

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_1,w} \mid w \in \Upsilon_1\}$ is equal to

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_2,w} \mid w \in \Upsilon_1\}$ is equal to

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_3,w} \mid w \in \Upsilon_1\}$ is equal to

$$\left\{[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}]\right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_1,w} \mid w \in \Upsilon_2\}$ is equal to

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_2,w} \mid w \in \Upsilon_2\}$ is equal to

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_3,w} \mid w \in \Upsilon_2\}$ is equal to

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_1,w} \mid w \in \Upsilon_3\}$ is equal to

$$\left\{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}\right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_2,w} \mid w \in \Upsilon_3\}$ is equal to

$$\left\{\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}\right\}$$

- The set $\{\mathfrak{c}_{\rho_3,w} \mid w \in \Upsilon_3\}$ is equal to

$$\left\{\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}\right\}$$