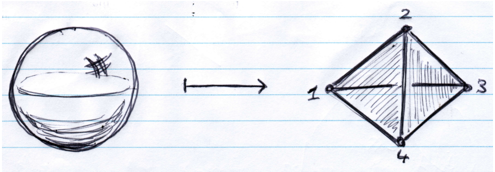
Geometrie und Topologie im Computeralgebrasystem GAP

Jonathan Spreer

Ulm, 3. Februar 2015

Geometrie und Topologie

- Studium von (triangulierten) Mannigfaltigkeiten



- Kombinatorische Argumente / diskrete Methoden beweisen geometrische und topologische Fragen.[1]

- Wie setzt Mathematische Software diese theoretischen Resultate praktisch um?

[1] W. Jaco, J. Johnson, J. S., S. Tillmann. *Bounds for the genus of a normal surface*, 2014.

simpcomp

Felix Effenberger and J. S. *simpcomp - A GAP package*, Version 2.0.0, 2009 – 2015.

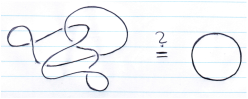
- Unterstützung von (abstrakten) Simplizialkomplexen in GAP
- Offizieller Bestandteil von GAP seit 2013 (sage kompatibel)
- Simpliziale blowups, diskrete Morsetheorie, etc.
- Größe: 341 Funktionen und 213 Seiten Handbuch
- "Best Software Presentation Award" der Fachgruppe Computeralgebra bei der ISSAC 2010 in München

Regina

B. Burton, R. Budney, W. Pettersson und andere. Regina: *normal surface and 3-manifold topology software*, Version 4.96, 1999 – 2015.

- Software zur Analyse von 3-Mannigfaltigkeiten
- Unterstützung für parametrisierte Algorithmen
- Im Aufbau: Schnittstelle für diskrete Morsetheorie

Unknotenerkennung

 [2]

↓

Normalflächen

↓

Polytoptheorie, “vertex enumeration”

↓

Regina
Software for 3-manifold topology
and normal surface theory

```
regina> M.isSolidTorus()
```

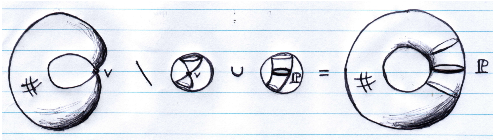
[2] W. Haken. *Theorie der Normalflächen*, 1961.

Konstruktion einer triangulierten K3-Fläche[5]

Simplizialkomplex $\cong_{PL}$ K3[3]

$\downarrow$

Auflösungen von Singularitäten



$\downarrow$

Triangulierung von (i) sing. Kummerfläche,
(ii) $\mathbb{P}$, (iii) PL-Homöomorphismen[4],
simultane bistellare Flips

$\downarrow$

```
gap> SCBlowup(K,1);
```

[3] E. Spanier. *The homology of Kummer manifolds*, 1956.

[4] B. Burton, J. S. *Computationally proving triangulated 4-manifolds to be diffeomorphic*, 2013.

[5] J. S., W. Kühnel. *Combinatorial properties of the K3 surface: Simplicial blowups and slicings*, 2011.

Diskrete Morsetheorie

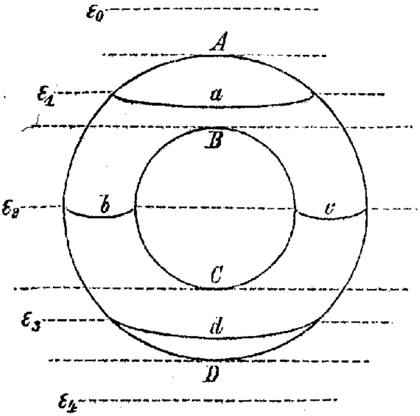
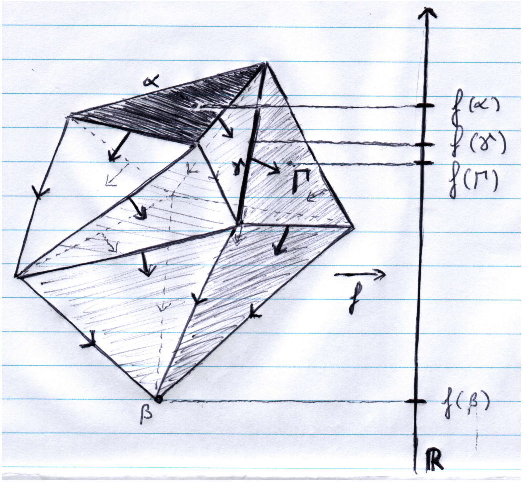


Fig. 5.

Möbius. Theorie der elementaren Verwandtschaft, 1863

Diskrete Morsetheorie



Forman. Diskrete Morsetheorie, 1995

Diskrete Morsetheorie

Diskrete Morsetheorie (DMT)[6]

$\downarrow$

Heuristiken[7]

$\downarrow$

s~~hr~~impcomp

```
gap> SCHomologyEx(M, DMTAlgo, SNFAlgo);

gap> SCFundamentalGroup(M);
```

[6] R. Forman. *A discrete Morse theory for cell complexes*, 1995

[7] J. Paixão, J. S. *Collapsing 3-sphere triangulations*. In preparation.

Das Paradox topologischer Algorithmen

- Viele implementierbare geometrische/topologische Algorithmen haben pathologische Laufzeiten: Knotengeschlecht in 3-Mannigfaltigkeiten[8], straffe Winkelstrukturen [9], optimale Morsefunktionen[10], etc.

- "In der Praxis": schnelle Berechnung oft möglich

- Ziel 1: erkläre (scheinbaren) Widerspruch

- Ziel 2: finde effiziente Algorithmen

---

[8] I. Agol, J. Hass, W. Thurston. *3-manifold knot genus is NP-complete*, 2002.

[9] B. Burton, J. S. *The complexity of detecting taut angle structures on triangulations*, 2013.

[10] M. Joswig, M. Pfetsch. *Computing optimal Morse matchings*, 2006.

Parametrisierte Algorithmen

- P (**NP**-schweres) Problem mit Eingabemenge A. Ein Parameter von P ist eine Funktion $k : A \to \mathbb{N}$.

- Neues Problem (P, k)

  Beispiel: *“Gegeben ein Graph. Existieren $\leq k$ Ecken, so dass jede Kante mindestens eine dieser Ecken enthält?*

- (P, k) ist parametrisierbar, falls ein Algorithmus $f \in O(g(k(a))|a|^{O(1)})$ existiert ($g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beliebig)

Hoffnung:

- $|a|$ = Größe der Eingabetriangulierung
- k = topologische Komplexität der Triangulierung

Parametrisierte Algorithmen

kritische Seiten einer diskreten Morsefunktion $f : \mathcal{T} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ obere Schranke für topologische Komplexität von $\mathcal{T}$

Berechnung optimaler Morsefunktionen ist **NP**-schwer.[11]

Ist das Problem parametrisierbar bezüglich der Anzahl kritischer Seiten?

Theorem (Burton, Lewiner, Paixao and S., 2013[12])
Die Berechnung optimaler Morsefunktionen ist nicht parametrisierbar bzgl. des natürlichen Parameters "Anzahl kritische Seiten".

---

[11] M. Joswig, M. Pfetsch. *Computing optimal Morse matchings*, 2006.

[12] B. Burton, T. Lewiner, J. Paixão, J. S. *Parameterized complexity of discrete Morse theory*, 2013.

Parametrisierte Algorithmen

$\#$ kritische Seiten einer diskreten Morsefunktion $f : \mathcal{T} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ obere Schranke für topologische Komplexität von $\mathcal{T}$

Berechnung optimaler Morsefunktionen ist **NP**-schwer.[11]

Ist das Problem parametrisierbar bezüglich der Anzahl kritischer Seiten?

Theorem (Burton, Lewiner, Paixao and S., 2013[12])

Die Berechnung optimaler Morsefunktionen ist nicht parametrisierbar bzgl. des natürlichen Parameters "Anzahl kritische Seiten".

[11] M. Joswig, M. Pfetsch. *Computing optimal Morse matchings*, 2006.

[12] B. Burton, T. Lewiner, J. Paixão, J. S. *Parameterized complexity of discrete Morse theory*, 2013.

Parametrisierte Algorithmen

... bezüglich anderer Parameter?

Theorem (Burton, Lewiner, Paixao and S., 2013[13])
Die Berechnung optimaler Morsefunktionen ist parametrisierbar bzgl. des Parameters "Baumweite des dualen Graphen".

- Viele Standardtriangulierungen haben sehr kleine Baumweite.
- Implementiert in Regina (11/2014)
- Laufzeitverbesserungen für typische Eingaben im Pilotprojekt "straffe Winkelstrukturen" [14]

[13] B. Burton, T. Lewiner, J. Paixão, J. S. *Parameterized complexity of discrete Morse theory*, 2013.

[14] B. Burton, J. S. *The complexity of detecting taut angle structures on triangulations*, Journal version, in preparation.

Parametrisierte Algorithmen

... bezüglich anderer Parameter?

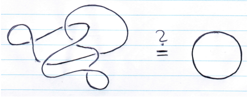
Theorem (Burton, Lewiner, Paixao and S., 2013[13])
Die Berechnung optimaler Morsefunktionen ist parametrisierbar bzgl. des Parameters "Baumweite des dualen Graphen".

- Viele Standardtriangulierungen haben sehr kleine Baumweite.
- Implementiert in Regina (11/2014)
- Laufzeitverbesserungen für typische Eingaben im Pilotprojekt "straffe Winkelstrukturen" [14]

[13] B. Burton, T. Lewiner, J. Paixão, J. S. *Parameterized complexity of discrete Morse theory*, 2013.

[14] B. Burton, J. S. *The complexity of detecting taut angle structures on triangulations*, Journal version, in preparation.

Und in der Zukunft?



- "Unknotenerkennung" ist in **NP**.[15]
- "Unknotenerkennung" ist in **co-NP** modulo der Verallgemeinerten Riemannschen Vermutung.[16]
- Ist "Unknotenerkennung" polynomiell lösbar / parametrisierbar?

[15] J. Hass, J. Lagarias, N. Pippenger. *The Computational Complexity of Knot and Link Problems*, 1999.

[16] G. Kuperberg, *Knottedness is in NP, modulo GRH*, 2014

Vielen Dank

https://code.google.com/p/simpcomp

http://regina.sourceforge.net