$\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES SURCOHÉRENTS. APPLICATION AUX FONCTIONS L

par

Daniel CARO

Table des matières

Introduction

Soient X un $\mathbb{C}$-schéma lisse, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels sur X et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}_X$-module à gauche cohérent. En notant, pour tout entier n, $\mathcal{D}_{X,n}$ le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre $\leq n$, ceux-ci constituent une filtration canonique du faisceau $\mathcal{D}_X$. L'anneau commutatif gradué associé sera désigné par $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X$. Il existe alors une bonne filtration de $\mathcal{E}$, i.e., telle que le gradué associé $\mathrm{gr}\mathcal{E}$ soit $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X$-cohérent. De plus, on vérifie que la dimension du gradué $\mathrm{gr}\mathcal{E}$ est indépendante du choix de la filtration. Par définition, $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si soit $\mathcal{E} = 0$, soit $\dim \mathrm{gr}\mathcal{E} = \dim X$, cette égalité étant notée (*). De plus, le fait que $\mathcal{E}$ soit holonome équivaut à la propriété suivante notée (**) : pour tout morphisme lisse $f\colon X' \to X$, pour tout diviseur Z' de X', $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Z'} f^*\mathcal{E}$ est un complexe de $\mathcal{D}_{X'}$-modules à gauche à cohomologie cohérente (cela dérive de [**BGK⁺87**, VII,10.7]). Enfin, il est important de rappeler que les complexes de $\mathcal{D}_X$-modules à gauche à cohomologie bornée et holonome forment une catégorie de coefficients stable par les six opérations cohomologiques de Grothendieck (à savoir $\otimes$, $\mathcal{H}om$, f_*, f^*, $f_!$ et $f^!$).

Maintenant, passons à la caractéristique p. On désigne par $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0,p)$, on note K son corps de fraction, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et k son corps résiduel, supposé de caractéristique p. Soit X un k-schéma lisse que l'on suppose relevable en un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$. On sait que, pour tout nombre premier l différent de p, les $\mathbb{Q}_l$-faisceaux constructibles forment aussi une catégorie de coefficients stable par les six opérations cohomologiques de Grothendieck. Cette cohomologie est appelée *cohomologie l-adique*. Afin de bâtir une *bonne cohomologie p-adique*, i.e., une catégorie de $\mathbb{Q}_p$-faisceaux stable par les six opérations

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14F30.
Mots clefs. — $\mathcal{D}$-module, fonctions L, foncteur cohomologique local, holonomie, morphisme de Frobenius.

L'auteur a bénéficié du support du réseau européen "Arithmetic Algebraic Geometry" (HPRN-CT-2000-00120) ainsi que de celui de l'Université de Sydney.

cohomologiques de Grothendieck, l'idée de Berthelot est, en s'inspirant de la caractéristique nulle, d'élaborer une théorie des $\mathcal{D}_X$*-modules arithmétiques*.

Plus précisément, en construisant le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre infini et de niveau fini sur $\mathfrak{X}$, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ (que l'on peut voir comme le complété faible tensorisé par $\mathbb{Q}$ du faisceau des opérateurs différentiels usuels $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$), il a défini la notion de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules (toujours à gauche par défaut).

En outre, il est parvenu à définir l'holonomie (notamment en démontrant l'analogue du théorème de Kashiwara et en procédant à une descente sur le niveau par Frobenius) de manière analogue à celle de (*). Enfin, il conjecture ([**Ber02**, 5.3.6.]) que la catégorie des complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à cohomologie bornée et holonome constitue une catégorie de coefficients stables par les six opérations de Grothendieck. Par exemple, on ne sait pas encore (sauf pour les courbes [**Car03**]) que l'holonomie est préservée par foncteur cohomologique local (conjecture [**Ber02**, 5.3.6.B]), ce qui représente un obstacle pour définir les fonctions L associées aux complexes de $\mathcal{D}_X$-modules arithmétiques holonomes.

Aussi, afin de bénéficier dès à présent d'une catégorie de coefficients suffisamment stable par les opérateurs cohomologiques et remplaçant celle des complexes de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à cohomologie bornée et holonome, dans cet article, on en arrive alors à la notion de $\mathcal{D}_X$*-modules arithmétiques surcohérents*, en demandant à un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de vérifier la propriété analogue à (**). Un premier exemple important de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules surcohérents est donné par les F-isocristaux unités surconvergents (cela résulte de la cohérence différentielle de ceux-ci [**Cara**]). On remarque que l'holonomie de ces derniers reste toujours conjectural. Dans un prochaine article, on étudiera de façon plus approfondie les liens qui existent entre les $\mathcal{D}_X$-modules arithmétiques et les F-isocristaux surconvergents ([**Carb**]).

Rappelons que Berthelot énonce une conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D] qui implique celle de la stabilité de l'holonomie par foncteur cohomologique local. On établira que cette conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D] implique que les notions de surcohérence et d'holonomie sont identiques (voir 3.1.2.7). La surcohérence se préservant par image directe par un morphisme propre, la conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D] entraîne qu'il en est de même de l'holonomie (conjecture [**Ber02**, 5.3.6.A]). Il en résulte que celle-ci implique à elle seule la stabilité de l'holonomie par les six opérateurs cohomologiques de Grothendieck.

Voyons maintenant le contenu des trois parties de cet article.

Tout d'abord, afin de pouvoir étudier la surcohérence, on établira les propriétés du foncteur cohomologique local sur les schémas (première partie) puis sur les schémas formels (deuxième partie). Pour les schémas formels, on modifie légèrement la définition du foncteur cohomologique local donné dans [**Ber02**, 4.4.4]. Ce changement permet notamment d'obtenir sa commutation avec l'image inverse et l'image directe d'un morphisme quelconque, ce qui reste une question pour les schémas (dans la première partie, on ne le prouve que pour un morphisme plat), de vérifier le triangle de localisation de Mayer-Vietoris (2.2.16) et de donner une caractérisation des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans un sous-schéma fermé (2.2.9), ce que l'on peut voir comme l'extension au cas non-lisse de l'analogue du théorème de Kashiwara. Enfin, on peut penser que les deux définitions coïncident.

La troisième section étudie la surcohérence. Un résultat essentiel, résultant des propriétés de stabilité de la surcohérence, est la construction pour un k-schéma séparé et de type fini U (pas nécessairement lisse) de la catégorie des $\mathcal{D}_U$-modules arithmétiques surcohérents (voir 3.2.10). En outre, on prouve que la catégorie des complexes de $\mathcal{D}_U$-modules arithmétiques à cohomologie bornée et surcohérente est stable par image directe et image inverse extraordinaire de morphismes quelconques de k-schémas séparés et de type fini (voir 3.2.10).

Pour finir, on en déduira une formule cohomologique des fonctions L associées aux complexes duaux $\mathfrak{D}$-linéairement de complexes à cohomologie surcohérente et bornée, généralisant d'une certaine manière celle de Étesse et Le Stum [**ÉLS93**] pour les F-isocristaux surconvergents. Rappelons le rôle essentiel que jouent celles-ci dans leur preuve de la conjecture de Katz concernant la méromorphie et la caractérisation des zéros et pôles unités des fonctions L associées aux représentations p-adiques, si celles-ci se prolongent sur une compactification du schéma de base ([**ÉLS97**]).

Une partie non négligeable de cet article est tiré de ma thèse ou s'inspire de celle-ci. Je tiens à remercier Bernard Le Stum pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail, ses remarques et ses conseils qui m'ont été indispensables.

Notations. — Les indices qc, tdf signifient respectivement *quasi-cohérent* et *de Tor-dimension finie* tandis que D^{b}, D^{+} et D^{-} veulent dire respectivement complexes à cohomologie bornée, bornée inférieurement et bornée supérieurement. Enfin, si $\mathcal{A}$ est un faisceau d'anneaux, les symboles ${}^{g}\mathcal{A}$, ${}^{d}\mathcal{A}$ puis ${}^{*}\mathcal{A}$ signifient respectivement $\mathcal{A}$-module "à gauche", "à droite" puis "à droite ou à gauche" (par exemple, $D({}^{g}\mathcal{A})$ indique la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-module à gauche). Si cela n'est pas précisé, un $\mathcal{A}$-module sera un $\mathcal{A}$-module à gauche.

1. Cohomologie locale sur les schémas

Soient m un entier, S un schéma muni d'un m-PD-idéal quasi-cohérent $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\alpha)$, supposé m-PD-nilpotent, S_0 le sous-schéma fermé de S défini par $\mathfrak{a}$. On suppose de plus que p est nilpotent sur S et $p \in \mathfrak{a}$. Enfin, on se fixe un entier s.

Si X est un S-schéma, on note X_0 sa réduction modulo $\mathfrak{a}$, $X_0^{(s)}$ le S_0-schéma déduit de X_0 par le changement de base par le s-ième itéré de Frobenius absolu de S_0 et $F^s_{X_0/S_0} : X_0 \to X_0^{(s)}$, le S_0-morphisme de Frobenius relatif. Pour donner un sens à la compatibilité à Frobenius, on supposera que $X_0^{(s)}$ se relève en un S-schéma lisse X'.

Rappelons ([**Ber96a**, 2.2.1]) que Berthelot construit pour tout entier positif m le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre $\leq n$ sur X* qu'il note $\mathfrak{D}^{(m)}_{X,\,n}$ puis *faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre fini sur X*, $\mathfrak{D}^{(m)}_{X}$, réunion des faisceaux $\mathfrak{D}^{(m)}_{X,\,n}$. De plus, on désigne par F^*_X (ou plus simplement F^*) le foncteur exact $F^{s*}_{X_0/S_0}$ ([**Ber00**, 2.2]) qui induit une équivalence de la catégorie des $\mathfrak{D}^{(m)}_{X'}$-modules dans celle des $\mathfrak{D}^{(m+s)}_{X}$-modules.

Si $\mathfrak{I}$ est un idéal de $\mathfrak{O}_X$ et Z le sous-schéma fermé de X correspondant, on note $\mathfrak{P}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ ou $\mathfrak{P}_{Z,\,(m),\,\alpha}(X)$ (resp. $\mathfrak{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ ou $\mathfrak{P}^n_{Z,\,(m),\,\alpha}(X)$) l'enveloppe à puissance divisée de niveau m (resp. et d'ordre n) de $\mathfrak{I}$, compatible à α (au sens de [**Ber96a**, 1.4.2] et [**Ber00**, Appendice]). De plus, on désigne par $(\overline{\mathfrak{I}}^{(m)},\widetilde{\mathfrak{I}}^{(m)})$ le m-PD-idéal de $\mathfrak{P}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$, $\overline{\mathfrak{I}}^{\{n\}_{(m)}}$ le n-ième terme de sa filtration m-PD-adique et $\overline{\mathfrak{I}}^{(m)}_n$ l'idéal engendré par les termes de la forme $x_1^{\{n_1\}_{(m)}}\cdots x_r^{\{n_r\}_{(m)}}$ avec $x_i \in \overline{\mathfrak{I}}^{(m)}$ et $\sum_i n_i \geq n$. Lorsque $\mathfrak{I}$ est munie d'une m-PD-structure, $(\mathfrak{P}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}),\overline{\mathfrak{I}}^{(m)}) = (\mathfrak{O}_X,\mathfrak{I})$ et on écrira simplement $\mathfrak{I}^{\{n\}_{(m)}}$ et $\mathfrak{I}^{(m)}_n$.

1.1. Rappels et premières propriétés. — Nous rappelons dans cette section la construction de la cohomologie locale ([**Ber02**, 4.4.4]). Nous prouvons ensuite la compatibilité de celle-ci avec le produit tensoriel, l'extension des scalaires et les limites inductives filtrantes.

1.1.1. — Sauf mention explicite du contraire, on gardera les notations suivantes : on désigne par X un S-schéma lisse et par Z un sous-schéma fermé de X défini par un idéal $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{O}_X$. De plus, on suppose donnée une $\mathfrak{O}_X$-algèbre $\mathfrak{B}_X$ munie d'une action de $\mathfrak{D}^{(m)}_X$ à gauche compatible à sa structure d'algèbre. On notera $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_X = \mathfrak{B}_X \otimes_{\mathfrak{O}_X} \mathfrak{D}^{(m)}_X$.

Proposition 1.1.2. — *Supposons que le schéma S soit noethérien. Alors le faisceau $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent.*

Démonstration. — La proposition est locale. On peut donc supposer X affine. De plus, comme X est noethérien, $\mathcal{I}$ est engendré par un nombre fini d'éléments $x_1,\ldots,x_r$. On remarque que $\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$ est engendré comme $\mathcal{O}_X$-algèbre par les termes de la forme $x_i^{\{n_i\}_{(m)}}$. Or, l'idéal engendré par les éléments de la forme $x_1^{\{n_1\}_{(m)}}\cdots x_r^{\{n_r\}_{(m)}}$ avec $\sum_i n_i \geq n$ est inclus dans $\overline{\mathcal{I}}^{\{n\}_{(m)}}$. D'où le résultat. $\square$

1.1.3. — D'après [**Ber96a**, 2.3.4.(ii)], le faisceau $\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$ possède une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module. De plus, pour tout $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module $\mathcal{E}$, on munit $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\mathcal{E})$ d'une structure canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module ([**Car02**, 1.1.4.1]). On rappelle aussi ([**Ber02**, 4.4.4]) que la structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module sur $\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$ vérifie la relation : pour tous entiers n et n', pour tout $P\in\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$ et tout $x\in\overline{\mathcal{I}}^{\{n'\}_{(m)}}$, on a $P\cdot x\in\overline{\mathcal{I}}^{\{n'-n\}_{(m)}}$. Il résulte de celle-ci que le sous-faisceau

$$\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{E}) := \varinjlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\mathcal{E})$$

de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\mathcal{E})$ possède une structure induite de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module. Or, le foncteur $\underline{\Gamma}_Z^{(m)}$ est exact à droite et la sous-catégorie de $D^+({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ des complexes injectifs vérifie les conditions d'existence des foncteurs dérivés droits ([**Har66**, I.5.1]). En effet, comme les limites inductives sont exactes on a le lemme suivant qui découle alors de [**Har66**, II.3.1] :

Lemme 1.1.4. — *Si $\mathcal{I}$ est un complexe acyclique borné inférieurement de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche injectifs, alors $\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{I})$ est acyclique.*

On en déduit l'existence du foncteur dérivé $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}\ :\ D^+({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})\to D({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$, que l'on résout en prenant une résolution droite de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules injectifs. On appellera ce foncteur *cohomologie locale à support strict dans Z de niveau m et d'ordre fini* (confère [**Ber02**, 4.4.4]).

On remarque que ce foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}$ peut être défini de manière analogue dans $D^+(\mathcal{O}_X)$.

De plus, celui-ci est fonctoriel en Z. En effet, si $Z'\subset Z$ est un sous-schéma fermé de Z, en notant $\mathcal{I}'$ et $\mathcal{I}$ les idéaux de $\mathcal{O}_X$ définissant les immersions fermées canoniques, la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées (confère [**Ber96a**, 1.4.2]) nous donne un (unique) m-PD-morphisme $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I})\to\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I}')$ qui est aussi un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres. On obtient donc un morphisme canonique de foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{Z'}^{(m)}\to\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}$.

1.1.5. — Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module. En notant $\widetilde{\mathcal{P}}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I}) := \mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$ et $\widetilde{\mathcal{P}}_{(m),\alpha}(\mathcal{I}) := \mathcal{B}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I})$, on vérifie que le sous faisceau

$$\underline{\widetilde{\Gamma}}_Z^{(m)}(\widetilde{\mathcal{E}}) := \varinjlim_n \mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\widetilde{\mathcal{E}})$$

de $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\widetilde{\mathcal{E}})$ possède une structure induite de $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-module. Or, d'après [**Car02**, 1.5.14], on a un isomorphisme canonique $\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)}$-linéaire :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\widetilde{\mathcal{E}})\tilde{\to}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}_X}(\widetilde{\mathcal{P}}^n_{(m),\alpha}(\mathcal{I}),\widetilde{\mathcal{E}}).$$

On en déduit un isomorphisme canonique $\underline{\widetilde{\Gamma}}_Z^{(m)}(\widetilde{\mathcal{E}})\tilde{\to}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\widetilde{\mathcal{E}})$. Par abus de notations, on omettra alors le tilde au dessus de Γ.

Proposition 1.1.6. — *On suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n, le faisceau d'anneaux $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est de dimension parfaite inférieure à N.*

Le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$ est alors défini sur $D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$. De plus, si $\mathcal{E} \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$ (resp. $D^-({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, $D_{\mathrm{qc}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, $D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$), on a alors $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E}) \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$ (resp. $D^-({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, $D_{\mathrm{qc}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, $D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$).

Démonstration. — Contentons-nous de prouver le cas le moins trivial, i.e., celui de la Tor-dimension finie. Il résulte aussitôt des hypothèses faites que pour tout $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, on a $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E}) \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{O}_X)$. Or, par le truchement de la théorie des modules induits ([**Sai89**, 1.5.3]), on obtient l'égalité $D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X) = D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X) \cap D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{O}_X)$. □

Proposition 1.1.7. — *On suppose que S est noethérien et on se donne $\mathcal{E} \in D^+({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$ (resp. on suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n, le faisceau d'anneaux $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est de dimension parfaite inférieure à N et on se donne $\mathcal{E} \in D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$).*

Pour tout objet $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$, il existe dans $D^+({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$ (resp. dans $D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$) un isomorphisme canonique fonctoriel en $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et Z

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}).$$

Démonstration. — Le cas nonrespé se traitant de manière analogue, on se ramène au cas respé. On aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1.1.8. — *Soient $\mathcal{I}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module et $\mathcal{P}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_X$-module plat. Le morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire canonique*

$$\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \to \underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})$$

est $\mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire.

Démonstration. — Comme $\mathcal{P}$ est $\mathcal{O}_X$-plat, on a le diagramme canonique commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \arrow[d, hook] \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}), \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}), \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}),
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des monomorphismes. Or, d'après [**Car02**, 1.5.24], la flèche du bas est $\mathcal{D}^{(m)}_X$-linéaire. Comme il en est de même pour les flèches verticales, on en déduit le résultat. □

Prouvons maintenant la proposition. Soient $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$-acycliques et $\mathcal{P}$ une résolution gauche à degrés bornés de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules plats. On a alors les morphismes

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \xleftarrow{\sim} \underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \to \underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}).$$

Comme $\mathcal{P}$ est un complexe à degrés bornés de $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules plats, d'après [**Har66**, II.4.1], le morphisme $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \to \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}$ est un isomorphisme. Comme $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$, on a donc construit la flèche du lemme.

De même, pour $\mathcal{E} \in D(\mathcal{O}_X)$ et $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{O}_X)$ en prenant une résolution droite de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{O}_X$-modules $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z$-acycliques et une résolution gauche à degrés bornés de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{O}_X$-modules plats, on construit un morphisme dans $D(\mathcal{O}_X)$:

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_Z(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}).$$

Comme un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}$-acyclique est aussi un $\mathcal{O}_X$-module $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}$-acyclique, et qu'un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module plat est aussi un $\mathcal{O}_X$-module plat, ce morphisme s'identifie à celui du lemme (en oubliant la structure de $\mathcal{D}_X$-module).

Or, comme $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent, il résulte du lemme sur les foncteurs way-out ([**Har66**, II.7.1]) que le morphisme canonique $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}),\mathcal{E})\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}),\mathcal{E}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})$ est un isomorphisme. En passant à la limite sur le niveau m, on termine la démonstration. □

Question 1.1.9. — Si $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{tdf}}({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ et $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$, alors il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire (S.G.A.6.Exposé II, prop. 7.6) :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}).$$

Je ne sais pas si celui-ci est dans $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire.

Proposition 1.1.10. — *On suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n, le faisceau d'anneaux $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est de dimension parfaite inférieure à N.*

Pour tout $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$, on a un isomorphisme canonique dans $D({}^g\widetilde{\mathcal{D}}_X^{(m)})$ fonctoriel en Z et $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{B}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{B}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}).$$

Démonstration. — On remarque que grâce à 1.1.6, les complexes sont bien définis. Construisons d'abord ce morphisme. En résolvant platement $\mathcal{E}$, on obtient un morphisme $\mathcal{E} \to \mathcal{B}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$. Il en résulte d'abord le morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{B}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})$ puis celui-ci $\mathcal{B}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}(\mathcal{B}_X \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E})$.

Comme pour tout entier n le faisceau $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est $\mathcal{O}_X$-cohérent, on vérifie (grâce au lemme sur les foncteurs way-out [**Har66**, II.7.1]) que ce morphisme est un isomorphisme. □

1.1.11. — Nous allons maintenant prouver que la cohomologie locale commute aux limites inductives filtrantes. Désignons par τ le topos annelé des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules, I un ensemble filtrant et $\tau^{(I)}$ le topos des systèmes inductifs de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules indexés par I. Le topos $\tau^{(I)}$ sera considéré comme annelé par le système inductif constant égal à $\mathcal{D}_X^{(m)}$, que l'on notera $\mathcal{D}_{X^{(\cdot)}}^{(m)}$. On dispose d'un premier foncteur canonique $\underset{\rightarrow}{l}_* : \tau \to \tau^{(I)}$ qui à un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module $\mathcal{E}$ associe le système inductif constant égal à $\mathcal{E}$ et d'un second $\underset{\rightarrow}{l}^{-1} : \tau^{(I)} \to \tau$ qui à un système inductif de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules $\mathcal{E}^{(\cdot)}$ associe le $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module $\varinjlim_i \mathcal{E}^i$. De la propriété universelle des limites inductives, il découle que le foncteur $\underset{\rightarrow}{l}^{-1}$ est adjoint à gauche du foncteur $\underset{\rightarrow}{l}_*$. Enfin, comme le foncteur $\underset{\rightarrow}{l}^{-1}$ est exact (de même que $\underset{\rightarrow}{l}_*$), on obtient un morphisme de topos $\underset{\rightarrow}{l} : (\tau, \mathcal{D}_X^{(m)}) \to (\tau^{(I)}, \mathcal{D}_{X^{(\cdot)}}^{(m)})$. On notera aussi $\varinjlim_I$ le foncteur $\underset{\rightarrow}{l}^{-1} \tilde{\to} \underset{\rightarrow}{l}^*$. Celui-ci étant exact, il se factorise en un foncteur entre les catégories dérivées, encore noté $\varinjlim_I : D({}^g\mathcal{D}_{X^{(\cdot)}}^{(m)}) \to D({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$.

Proposition 1.1.12. — *On suppose que S est un schéma noethérien. Le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}$ commute alors aux limites inductives filtrantes, i.e., le diagramme canonique*

$$\begin{array}{ccc}
D^+({}^g\mathcal{D}_{X^{(\cdot)}}^{(m)}) & \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}} & D^+({}^g\mathcal{D}_{X^{(\cdot)}}^{(m)}) \\
{\scriptstyle \varinjlim_I}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varinjlim_I} \\
D^+({}^g\mathcal{D}_X^{(m)}) & \xrightarrow{\mathbb{R}\underline{\Gamma}_Z^{(m)}} & D^+({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Soit $\mathcal{E}^{(\cdot)} \in D^{+}({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{X^{(\cdot)}})$. On dispose d'un morphisme fonctoriel $\mathcal{D}^{(m)}_{X}$-linéaire

$$\varinjlim_{I} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\mathcal{E}^{(\cdot)}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z} \circ \varinjlim_{I}(\mathcal{E}^{(\cdot)}).$$

En effet, si $\mathcal{I}^{(\cdot)}$ est une résolution droite de $\mathcal{E}^{(\cdot)}$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_{X^{(\cdot)}}$-modules à gauche injectifs, alors on a les morphismes : $\varinjlim_{I}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\mathcal{E}^{(\cdot)}) \tilde{\to} \varinjlim_{I}(\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\mathcal{I}^{(\cdot)})) \to \underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\varinjlim_{I}\mathcal{I}^{(\cdot)}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\varinjlim_{I}\mathcal{I}^{(\cdot)}) \tilde{\leftarrow}$ $\tilde{\leftarrow} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{Z}(\varinjlim_{I}(\mathcal{E}^{(\cdot)}))$, la deuxième flèche de gauche résultant de la propriété universelle des limites inductives.

Pour conclure la démonstration, il suffit de prouver que celui-ci est un isomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire. Les limites inductives commutant entre elles, il ne reste plus qu'à vérifier que le morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$\varinjlim_{I} \circ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^{n}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}), \mathcal{E}^{(\cdot)}) \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}^{n}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I}), \varinjlim_{I} \mathcal{E}^{(\cdot)})$$

est un isomorphisme. Puisque $\mathcal{P}^{n}_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, le lemme sur les foncteurs way-out ([**Har66**, II.7.1]) nous permet de terminer la preuve. □

1.2. Commutation de la cohomologie locale avec l'image inverse extraordinaire et l'image directe. — Nous prouvons dans cette section la commutation compatible à Frobenius de la cohomologie locale avec l'image inverse extraordinaire et l'image directe d'un morphisme plat.

1.2.1. — On suppose dans cette section que le schéma S est noethérien et de dimension de Krull finie et que la m-PD-structure $(\mathfrak{b}, \alpha)$ de $\mathfrak{a}$ provient d'une $(m-1)$-PD-structure (ce qui implique que celle-ci est m-PD-nilpotente). Soient $f_0 : Y_0 \to X_0$ un morphisme quasi-séparé et quasi-compact de S_0-schémas lisses et $f'_0 : Y_0^{(s)} \to X_0^{(s)}$ le morphisme induit par f par changement de base. On suppose en outre que X_0, $X_0^{(s)}$, Y_0 et $Y_0^{(s)}$ se relève en des S-schémas lisses X, X', Y et Y'.

De plus, T_X désignera un sous-schéma fermé de X_0, $T_{X'}$ (resp. T_Y, $T_{Y'}$) son image inverse sur $X_0^{(s)}$ (resp. Y_0, $Y_0^{(s)}$). Enfin, on pose $T_X^{(s)} = (F^{s}_{X_0/S_0})^{-1}(T_{X'})$ et $T_Y^{(s)} = (F^{s}_{Y_0/S_0})^{-1}(T_{Y'})$.

1.2.2. — On rappelle ([**Ber00**, 2.1.6]) que si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{(m)}_{X}$-module alors on peut définir par recollement l'image inverse de $\mathcal{E}$ par f_0^*, $f_0^*(\mathcal{E})$, ce dernier étant muni d'une structure de $\mathcal{D}^{(m)}_{Y}$-module (aspect cristallin). Par fonctorialité, le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{Y\to X} := f_0^*(\mathcal{D}^{(m)}_{X})$ est muni d'une structure de $(\mathcal{D}^{(m)}_{Y}, f_0^{-1}(\mathcal{D}^{(m)}_{X}))$-bimodule. Suivant les conventions de [**Ber00**, 3.2.3], le foncteur image inverse extraordinaire $f_0^! : D^{-}({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{X}) \to D^{-}({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{Y})$ se définit alors en posant pour $\mathcal{E} \in D^{-}({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{X})$:

$$f_0^!\mathcal{E} = \mathcal{D}^{(m)}_{Y\to X} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}(\mathcal{D}^{(m)}_{X})} f_0^{-1}\mathcal{E}[d_{Y/X}],$$

$d_{Y/X}$ signifiant la dimension relative de Y sur X. On remarque alors que $\mathbb{L}f_0^* = f_0^![-d_{Y/X}]$. De plus, l'image inverse extraordinaire commute à Frobenius, i.e., pour tout objet $\mathcal{E}'$ de $D^{-}({}^{g}\mathcal{D}^{(m)}_{X'})$, on a un isomorphisme $\mathcal{D}^{(m+s)}_{Y}$-linéaire : $f_0^!(F_X^*\mathcal{E}') \tilde{\to} F_Y^* {f'}_0^!(\mathcal{E}')$. Enfin, si $g_0 : Z_0 \to Y_0$ est un morphisme de S_0-schémas lisses tel que Z_0 (resp. $Z_0^{(s)}$) se relève en un S-schéma lisse Z (resp. Z'), alors on dispose de l'isomorphisme $f_0^! \circ g_0^! \tilde{\to} (f_0 \circ g_0)^!$, celui-ci étant en outre compatible à Frobenius.

Lemme 1.2.3. — *On suppose que f_0 est plat. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(m)}_{X}$-module. Il existe alors un morphisme canonique fonctoriel en T_X et en $\mathcal{E}$: $f_0^* \circ \underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E}) \to \underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y} \circ f_0^*(\mathcal{E})$.*

Démonstration. — Le morphisme f_0 se relevant localement en un morphisme (plat) $Y \to X$, on dispose par recollement d'un morphisme fonctoriel en T_X et en $\mathcal{E}$: $f_0^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{T_X,(m),\alpha}(X), \mathcal{E}) \to$

$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f_0^*\mathcal{P}_{T_X,(m),\alpha}(X),\ f_0^*\mathcal{E})$. De plus, comme f_0 est plat, on obtient par recollement un m-PD-isomorphisme canonique $f_0^*\mathcal{P}_{T_X,(m),\alpha}(X)\tilde{\to}\mathcal{P}_{T_Y,(m),\alpha}(Y)$ compatible aux filtrations m-PD-adiques ([**Ber96a**, 1.4.6]) et fonctoriel en T_X (grâce à la propriété universelle [**Ber96a**, 1.4.1]). On en déduit (encore par recollement) la construction d'un (unique) morphisme fonctoriel en T_X et en $\mathcal{E}$, $f_0^*\circ\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E})\to\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}\circ f_0^*(\mathcal{E})$, s'inscrivant dans le diagramme canonique

$$\begin{tikzcd}
f_0^*\circ\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}(f_0^*\mathcal{E}) \arrow[d, hook] \\
f_0^*\circ\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}_{T_X,(m),\alpha}(X),\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{P}_{T_Y,(m),\alpha}(Y),\ f_0^*\mathcal{E}).
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 1.2.4. — *On suppose que f_0 est plat. On a alors un isomorphisme canonique $\mathcal{D}^{(m)}_Y$-linéaire, fonctoriel en $\mathcal{E}\in D^+({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$ et en T_X*

$$f_0^*\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}\circ f_0^*(\mathcal{E}).$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{D}^{(m)}_X$-modules à gauche injectifs. Grâce à 1.2.3, on obtient $f_0^*\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E})\tilde{\to}f_0^*\circ\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{I})\to\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(f_0^*\mathcal{I})$.

Or, comme $\mathcal{D}^{(m)}_{Y\to X}$ est un $f_0^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_X$-module plat, le morphisme $f_0^*(\mathcal{E})\to f_0^*(\mathcal{I})$ est un isomorphisme ([**Har66**, II.4.1]). D'où le morphisme canonique $f_0^*\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E})\to\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}(f_0^*\mathcal{E})$ fonctoriel en $\mathcal{E}$ et en T_X.

Il reste à prouver que c'est un isomorphisme, ce qui est local en X et Y. On peut donc supposer que f_0 se relève en un morphisme plat $Y\to X$. Or, les algèbres $\mathcal{P}^n_{T_X,(m),\alpha}(X)$ sont $\mathcal{O}_X$-cohérentes. En appliquant le lemme sur les foncteurs way-out ([**Har66**, II.7.1]), on en déduit que c'est un isomorphisme dans $D(\mathcal{O}_Y)$ et donc dans $D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_Y)$. □

Proposition 1.2.5. — *On suppose que f_0 est plat. L'isomorphisme 1.2.4 est compatible à la composition, i.e., si $g_0:Z_0\to Y_0$ est un morphisme plat de S_0-schémas lisses tels que Z_0 se relève en un S-schéma lisse Z, alors, en notant $T_Z=g_0^{-1}(T_Y)$, le diagramme canonique suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
g_0^*f_0^*\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & g_0^*\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}f_0^*(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Z}g_0^*f_0^*(\mathcal{E}) \arrow[d] \\
(f_0\circ g_0)^*\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Z}(f_0\circ g_0)^*(\mathcal{E}).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — L'assertion est locale en X et en Y. On peut donc supposer que les morphismes f_0 et g_0 se relèvent. La proposition résulte alors de la compatibilité à la composition de la commutation du bifoncteur $\mathbb{R}\mathcal{H}om(-,-)$ à l'image inverse. □

1.2.6. — On supposera par la suite que l'une des hypothèses de [**Ber96a**, 1.4.4] concernant l'idéal $\mathfrak{b}$ est vérifiée (par exemple le cas où l'idéal $\mathfrak{b}+p\mathcal{O}_S$ est localement principal, hypothèse qui sera validée lorsque nous travaillerons sur des schémas formels). Avec ceci, on obtient la description suivante dont on se servira dans le calcul de la démonstration du lemme 1.2.10.

Soient $\mathfrak{I}$ un idéal de $\mathcal{O}_X$ et $x_1,\dots,x_r$ des générateurs de $\mathfrak{I}$. L'idéal $\overline{\mathfrak{I}}^{(m)}_n$ est engendré par les produits de la forme $x_1^{\{n_1\}_{(m)}}\cdots x_r^{\{n_r\}_{(m)}}$, pour $n_1+\cdots+n_r\geq n$.

Proposition 1.2.7. — *On a un isomorphisme canonique* $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X^{(s)}}(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+s)}_{T_X}(\mathcal{E})$ *fonctoriel en* $\mathcal{E} \in D^+({}^g\mathcal{D}^{(m)}_X)$. *De plus, les diagrammes canoniques suivants, où les flèches verticales sont induites par cet isomorphisme, sont commutatifs*

(1.2.7.1)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X^{(s)}}(\mathcal{E}) \arrow[d] \\ & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+s)}_{T_X}(\mathcal{E}) \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} f_0^* \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X^{(s)}}(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y^{(s)}} \circ f_0^*(\mathcal{E}) \arrow[d] \\ f_0^* \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+s)}_{T_X}(\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+s)}_{T_Y} \circ f_0^*(\mathcal{E}). \end{tikzcd}$$

Démonstration. — On sait déjà par construction que $\mathcal{P}_{T_X^{(s)},(m),\alpha}(X) = \mathcal{P}_{T_X,(m+s),\alpha}(X)$. Afin d'obtenir l'isomorphisme de la proposition, il reste à prouver que leur filtration respective sont cofinales l'une de l'autre, ce qui résulte des deux lemmes 1.2.9, 1.2.10 qui suivent.

Lemme 1.2.8. — *Soient m' un entier, R une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$ un m'-PD-idéal de R, A une R-algèbre, $(I, J, [\,])$ un m'-PD-idéal de A compatible à $(\mathfrak{b}, \alpha)$ et K un idéal de A. S'il existe N_0 tel que $\overline{I}^{(m')}_{N_0} \subset K$ alors il existe N_0' tel que $I^{\{N_0'\}_{(m')}} \subset K$.*

Démonstration. — Si $m' = 0$, c'est tautologique. On supposera donc $m' \geq 1$. On note : $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}+pR$, $J_1 = J + \mathfrak{b}_1 A$. On vérifie qu'il suffit de montrer qu'il existe un entier N_0' tels que tous les produit de la forme (même notation que [**Ber00**, Appendice A.3.2])

$$y_1^{[\underline{a}_1,\underline{b}_1\}_{(m')}} \cdots y_r^{[\underline{a}_r,\underline{b}_r\}_{(m')}},$$

où $y_j \in J_1 \cap I$, $\underline{a}_j = (a_{j,1},\ldots,a_{j,t_j})$, $\underline{b}_j = (b_{j,1},\ldots,b_{j,t_j})$, avec $t_j \geq 1$, $a_{j,k} \geq 1$, $b_{j,t_j} \geq 1$, $b_{j,k} \geq p^{m'+1}$ pour tout $k < t_j$ (grâce à la remarque de l'appendice de [**Ber00**, A.3.2]) et vérifiant $\sum_j b_{j,1} \cdots b_{j,t_j} \geq N_0'$, sont des éléments de K.

Or, l'un deux cas est validé :

1. $r \geq N_0$ ou il existe j et k tels que $b_{j,k} \geq N_0$,
2. $r \leq N_0$ et pour tout j et tout k, $b_{j,k} \leq N_0$.

Le premier cas étant immédiat traitons le deuxième. Pour N_0' assez grand il existe un j_0 tel que $t_{j_0} \geq 2$ et $(p^{m'+1})^{t_{j_0}-1} \geq N_0$. Il existe des entiers q_1, r_1 tels que $b_{j_0,1} = p^{m'} q_1 + r_1$, avec $0 \leq r_1 < p^{m'}$. En posant $y = y_{j_0}^{[a_{j_0,1}]} \in J_1 \cap I$, on calcule $y^{\{b_{j_0,1}\}_{(m')}} = y^{[q_1]} y^{(p^{m'}-1)q_1+r_1}$. Comme $b_{j_0,1} \geq p^{m'+1}$, $y^{\{b_{j_0,1}\}_{(m')}}$ est alors un multiple de y^2. On en déduit que l'inégalité $(p^{m'+1})^{t_{j_0}-1} \geq N_0$ implique $y_{j_0}^{[\underline{a}_{j_0},\underline{b}_{j_0}\}_{(m')}} \in K$. □

Dans les deux lemmes qui suivent, $\mathfrak{I}$ (resp. $\mathfrak{I}'$) désigne l'idéal définissant $T_X \hookrightarrow X$ (resp. $T_X^{(s)} \hookrightarrow X$).

Lemme 1.2.9. — *Pour tout entier n_0, $\overline{\mathfrak{I}'}^{\{n_0\}_{(m)}} \subset \overline{\mathfrak{I}}^{\{\lceil n_0/p^m \rceil\}_{(m+s)}}$.*

Démonstration. — Soit $x' \in \mathfrak{I}'$. Il existe $x \in \mathfrak{I}$, $a \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_X$ tels que $x' = x^{p^s} + a$. Comme la m-PD-structure $(\mathfrak{b},\alpha)$ de $\mathfrak{a}$ est même une $(m-1)$-PD-structure, $x'^{p^m} = x^{p^{m+s}} + a'b$, où $a' \in \mathfrak{a}\mathcal{O}_X$ et $b \in \mathfrak{b}_1\mathcal{O}_X$ (avec $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} + p\mathcal{O}_S$).

Soit $n = p^m q + r$, avec $0 \leq r \leq p^m - 1$.

On a $x'^{\{n\}_{(m)}} = x'^r (x^{p^{m+s}} + a'b)^{[q]} = x'^r \sum_{q_1+q_2=q} (x^{p^{m+s}})^{[q_1]} a'^{q_2} b^{[q_2]}$. Il en résulte $x'^{\{n\}_{(m)}} \in \overline{\mathfrak{I}}^{\{q+r\}_{(m+s)}} \subset \overline{\mathfrak{I}}^{\{\lceil n/p^m \rceil\}_{(m+s)}}$. On en déduit, pour tout entier n_0, $\overline{\mathfrak{I}'}^{(m)}_{n_0} \subset \overline{\mathfrak{I}}^{(m+s)}_{\lceil n_0/p^m \rceil}$ puis $\overline{\mathfrak{I}'}^{\{n_0\}_{(m)}} \subset \overline{\mathfrak{I}}^{\{\lceil n_0/p^m \rceil\}_{(m+s)}}$. □

Lemme 1.2.10. — *Pour tout entier n_0, il existe un entier N_0 tel que $\overline{\mathfrak{I}}^{\{N_0\}_{(m+s)}} \subset \overline{\mathfrak{I}'}^{\{n_0\}_{(m)}}$.*

Démonstration. — Soient $x \in \mathfrak{I}$ et n un entier positif. Il existe des entiers q, r, q', r' tels que $n = p^{m+s}q + r$, $0 \leq r < p^{m+s}$, $r = p^s q' + r'$ et $0 \leq q' < p^s$. On remarque que $x' := x^{p^s} \in \mathfrak{I}'$ et $x^{\{n\}_{(m+s)}} = x^r (x'^{p^m})^{[q]} = x^{r'} (x'^{q'} x'^{\{p^m q\}_{(m)}}) \in \overline{\mathfrak{I}'}^{\{q'+p^m q\}_{(m)}}$.

Or, si N est un entier et si $x_1, \ldots, x_r$ engendrent $\mathfrak{I}$, l'idéal $\overline{\mathfrak{I}}_N^{(m+s)}$ est engendré par les éléments de la forme $x_1^{\{n_1\}_{(m+s)}} \cdots x_r^{\{n_r\}_{(m+s)}}$ pour $n_1 + \cdots + n_r \geq N$ (1.2.6). Il en résulte qu'il existe N_0 tel que $\overline{\mathfrak{I}}_{N_0}^{(m+s)} \subset \overline{\mathfrak{I}'}_{n_0}^{(m)}$. On conclut grâce à 1.2.8. □

Il reste alors à prouver la commutativité des diagrammes 1.2.7.1, ce qui est immédiat. □

Théorème 1.2.11. — *Soit $\mathcal{E}' \in D^+({}^g\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$. On a un isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-linéaire, fonctoriel en $\mathcal{E}'$ et en T_X :*
$$F_X^* \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_{X'}}^{(m)}(\mathcal{E}') \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_X}^{(m+s)}(F_X^* \mathcal{E}').$$

Démonstration. — Cela résulte des propositions 1.2.4 et 1.2.7. □

Remarque 1.2.12. — On vérifie que les morphismes 1.1.7 et 1.1.10 de la section précédente sont compatibles à Frobenius. On a en outre la proposition suivante.

Théorème 1.2.13. — *On suppose que f_0 est plat. L'isomorphisme de la proposition 1.2.4 est compatible à Frobenius, i.e., pour tout $\mathcal{E}' \in D^+({}^g\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$, le diagramme canonique*
$$\begin{CD}
F_Y^* \circ f'^*_0 \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_{X'}}^{(m)}(\mathcal{E}') @>>> F_Y^* \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_{Y'}}^{(m)} \circ f'^*_0(\mathcal{E}') \\
@VVV @VVV \\
f_0^* \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_X}^{(m+s)} \circ F_X^*(\mathcal{E}') @>>> \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_Y}^{(m+s)} \circ f_0^* \circ F_X^*(\mathcal{E}'),
\end{CD}$$
où les flèches horizontales sont induites par les isomorphismes de la proposition 1.2.4, et où les flèches verticales proviennent de la commutation à Frobenius de l'image inverse et de la cohomologie locale, est commutatif.

Démonstration. — Il résulte de l'égalité $f'_0 \circ F_{Y_0/S_0}^s = F_{X_0/S_0}^s \circ f_0$ et de 1.2.5 appliqué à $f'_0 \circ F_{Y_0/S_0}^s$ puis à $F_{X_0/S_0}^s \circ f_0$ le diagramme commutatif :
$$\begin{CD}
F_Y^* \circ f'^*_0 \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_{X'}}^{(m)}(\mathcal{E}') @>>> F_Y^* \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_{Y'}}^{(m)} \circ f'^*_0(\mathcal{E}') \\
@VVV @VVV \\
f_0^* \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_X^{(s)}}^{(m)} \circ F_X^*(\mathcal{E}') @>>> \mathbb{R}\underline{\Gamma}_{T_Y^{(s)}}^{(m)} \circ f_0^* \circ F_X^*(\mathcal{E}').
\end{CD}$$
On termine grâce au diagramme de droite de 1.2.7.1. □

Remarque 1.2.14. — Si on suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n, le faisceau d'anneaux $\mathcal{P}_{(m),\alpha}^n(\mathfrak{I})$ est de dimension parfaite inférieure à N, alors on peut remplacer dans les théorèmes ou propositions précédents l'hypothèse $\mathcal{E} \in D^+({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ (resp. $\mathcal{E}' \in D^+({}^g\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$) par $\mathcal{E} \in D({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ (resp. $\mathcal{E}' \in D({}^g\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$).

Prouvons à présent la commutation de la cohomologie locale à l'image direct d'un morphisme plat 1.2.26. A cette fin, une première étape consiste à établir la $\mathcal{D}$-linéarité et la compatibilité à Frobenius du morphisme de projection 1.2.21. Commençons par rappeler la définition de l'image directe.

1.2.15. — On désigne par ω_X le faisceau des formes différentielles de degré maximum sur X. En tensorisant $\mathcal{D}_X^{(m)}$ à droite par ω_X^{-1}, on obtient un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodule à gauche, auquel on applique f_0^*

pour la structure droite tordue. On obtient ainsi un $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},\mathcal{D}_Y^{(m)})$-bimodule à gauche, qu'on transforme en un $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},\mathcal{D}_Y^{(m)})$-bimodule en tensorisant à droite par ω_Y. On note

$$\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}^{(m)} := f_{0,d}^*(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y$$

le bimodule ainsi obtenu. Comme le foncteur $f_{0,*}$ est de dimension cohomologique finie sur la catégorie des faisceaux abéliens sur Y, on dispose du foncteur dérivé $\mathbb{R}f_{0,*}\colon D^-(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}) \to D^-(f_{0,*}f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}) \subset D^-(\mathcal{D}_X^{(m)})$. On définit alors le foncteur image directe $f_+\colon D^-({}^g\mathcal{D}_Y^{(m)}) \to D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ en posant pour $\mathcal{F} \in D^-(\mathcal{D}_Y^{(m)})$

$$f_{0,+}(\mathcal{F}) := \mathbb{R}f_{0,*}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}^{(m)} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F}).$$

Pour tout complexe $\mathcal{F}' \in D^-(\mathcal{D}_{Y'}^{(m)})$, on dispose de deux isomorphismes $F_X^* f'_{0,+}(\mathcal{F}') \tilde{\to} f_{0,+}(F_Y^*\mathcal{F}')$. Le premier a l'avantage d'être valable pour tout morphisme f_0 (voir [**Ber00**, 3.4.4]) tandis que le deuxième est construit exclusivement pour f_0 propre ([**Car03**, 1.2.7]). L'avantage de ce dernier est que l'isomorphisme d'adjonction entre l'image directe et l'image inverse extraordinaire est compatible à Frobenius (voir [**Car03**, 1.2.10]). En outre, comme nous le verrons dans la troisième partie de cet article, sans nuire à la généralité des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, nous travaillerons exclusivement avec des morphismes propres de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses (3.2.9). Nous prendrons donc par défaut l'isomorphisme [**Car03**, 1.2.7]. Avec celui-ci, si $g_0\colon Z_0 \to Y_0$ est un autre morphisme propre de S_0-schémas lisses tel que Z_0 (resp. $Z_0^{(s)}$) se relève en un S-schéma lisse Z (resp. Z'), alors l'isomorphisme canonique $f_{0,+} \circ g_{0,+} \tilde{\to} (f_0 \circ g_0)_+$, est compatible à Frobenius ([**Car03**, 1.2.8]).

Lemme 1.2.16. — *Soient $g : (Y,g^{-1}\mathcal{A}) \to (X,\mathcal{A})$ un morphisme d'espaces annelés commutatifs, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-module et $\mathcal{G}$ un $g^{-1}\mathcal{A}$-module, $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme d'anneaux commutatifs et $\tilde{g}$: $(Y,g^{-1}\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{B})$ le morphisme induit par g. Le morphisme canonique de projection de g est compatible à l'extension $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, i.e., on a le diagramme canonique commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} g_*\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} g_*(g^{-1}\mathcal{F} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \arrow[d] \\
(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} g_*\mathcal{G}) \arrow[d] & g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}\mathcal{F} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \arrow[d] \\
(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \arrow[r] & g_*((g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}\mathcal{F}) \otimes_{g^{-1}\mathcal{B}} (g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G})),
\end{tikzcd}$$

la flèche du bas étant le morphisme de projection de $\tilde{g}$ et celle du haut provenant par extension $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ du morphisme de projection de g.

Démonstration. — On utilisera les deux sous-lemmes suivants.

Sous-lemme 1.2.17. — *Soient $f : (Y,\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{A})$ et $g : (Z,\mathcal{C}) \to (Y,\mathcal{B})$ deux morphismes d'espaces annelés commutatifs, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{C}$-module. Le morphisme canonique de projection est compatible à la composition, i.e., on dispose du diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*g_*\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & f_*(f^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} g_*\mathcal{G}) \arrow[r] & f_*g_*(g^*f^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{G}) \arrow[d] \\
\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} (f\circ g)_*\mathcal{G} \arrow[rr] & & (f\circ g)_*((f\circ g)^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{G})
\end{tikzcd}$$

Sous-lemme 1.2.18. — *Soient $f : (Y,\mathcal{B}) \to (X,\mathcal{A})$ un morphisme d'espaces annelés commutatifs, $\mathcal{E},\mathcal{F}$ deux $\mathcal{A}$-modules et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{B}$-module. Le composé des deux morphismes de projection*

$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} f_*(\mathcal{G}) \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} f_*(f^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \to f_*(f^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{B}} f^*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G})$ *s'identifie au morphisme de projection* $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} f_*(\mathcal{G}) \to f_*(f^*(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{G})$.

Prouvons à présent le lemme 1.2.16 et reprenons ses notations. Par fonctorialité, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} g_*\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} g_*\mathcal{G}) \arrow[d] \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \arrow[r] & (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}).
\end{tikzcd}$$

De plus, comme les deux morphismes composés $(Y, g^{-1}\mathcal{B}) \to (Y, g^{-1}\mathcal{A}) \xrightarrow{g} (X, \mathcal{A})$ et $(Y, g^{-1}\mathcal{B}) \xrightarrow{\tilde{g}} (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{A})$ sont égaux, il résulte de 1.2.17 le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{B}} g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \arrow[r] & g_*((g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}\mathcal{F}) \otimes_{g^{-1}\mathcal{B}} (g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G})) \\
\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[u] & g_*(g^{-1}\mathcal{F} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} (g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G})). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

En outre, on déduit de 1.2.18 que les deux morphismes composés $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} g_*\mathcal{G}) \to \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \to g_*(g^{-1}\mathcal{F} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} (g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}))$ et $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} g_*\mathcal{G} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} g_*(g^{-1}\mathcal{F} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G}) \to g_*(g^{-1}\mathcal{B} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} g^{-1}\mathcal{F} \otimes_{g^{-1}\mathcal{A}} \mathcal{G})$ s'identifie via l'isomorphisme $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{F}$. On termine alors la preuve en mettant bout à bout tous ces diagrammes commutatifs. □

1.2.19. — Soient $\mathcal{G}$ un $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche et $\mathcal{P}^n_{X(m)}$ l'enveloppe à puissance divisée de niveau m et d'ordre n de l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X \times_S X$. D'après la remarque [**Car02**, 1.1.6] et avec sa terminologie, la structure de $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche de $\mathcal{G}$ équivaut à la donnée d'une m-PD-stratification

$$\epsilon_n^{\mathcal{G}} \; : \; f_0^{-1}\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f_0^{-1}\mathcal{P}^n_{X(m)}.$$

On en déduit par exemple avec les méthodes classiques que si $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ sont deux $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules, alors $\mathcal{G}_1 \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}} \mathcal{G}_2$ est muni d'une structure de $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-module.

Comme $\mathcal{P}^n_{X(m)}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre pour les structures droite et gauche, les morphismes de projection

$$\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}\mathcal{G} \to f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{P}^n_{X(m)} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}),\; f_{0*}\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n_{X(m)} \to f_{0*}(\mathcal{G} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f_0^{-1}\mathcal{P}^n_{X(m)}),$$

sont des isomorphismes. On en déduit ainsi une m-PD-stratification $(f_{0*}(\epsilon_n^{\mathcal{G}}))$ sur $f_{0*}\mathcal{G}$. On vérifie de plus que cette m-PD-stratification correspond à la structure canonique de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module de $f_{0*}\mathcal{G}$.

Comme le faisceau $f_0^{-1}F_X^*\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ est un $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m+s)}, f_0^{-1}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})$-bimodule, il en résulte le foncteur $f_0^{-1}F_X^*\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}} -$ de la catégorie des $f_0^{-1}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche dans celle des $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-modules à gauche. Le foncteur f_{0*} commute à Frobenius, i.e., pour tout $f_0^{-1}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module $\mathcal{G}'$, on dispose de l'isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+s)}$-linéaire :

$$F_X^*\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{D}_{X'}^{(m)}} f_{0*}\mathcal{G}' \xrightarrow{\sim} f_{0*}(f_0^{-1}F_X^*\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}} \mathcal{G}').$$

Lemme 1.2.20. — *Soient* $\mathcal{F}$ *un* $\mathcal{D}_X^{(m)}$*-module à gauche et* $\mathcal{G}$ *un* $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$*-module à gauche. Le morphisme de projection*

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}\mathcal{G} \to f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}). \tag{1.2.20.1}$$

est $\mathcal{D}_X^{(m)}$*-linéaire et compatible à Frobenius.*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que le morphisme 1.2.20.1 est horizontal, i.e., qu'il est compatible aux stratifications $(\epsilon_n^{\mathcal{F}} \otimes f_{0*}(\epsilon_n^{\mathcal{G}}))$ pour le terme de gauche et $f_{0*}(f_0^{-1}\epsilon_n^{\mathcal{F}} \otimes \epsilon_n^{\mathcal{G}})$ pour l'autre. On notera ici $\mathcal{P}^n$ pour $\mathcal{P}^n_{X(m)}$. Or, si $\mathcal{F}_n$ est un $\mathcal{P}^n$-module et $\mathcal{G}_n$ un $f_0^{-1}\mathcal{P}^n$-module, le morphisme de projection : $\mathcal{F}_n \otimes_{\mathcal{P}^n} f_{0*}\mathcal{G}_n \to f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F}_n \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{P}^n} \mathcal{G}_n)$ est fonctoriel en $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$. On en déduit le diagramme canSonique commutatif

(1.2.20.2)

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \underset{\mathcal{P}^n}{\otimes} f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{P}^n \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_n^{\mathcal{F}}\otimes f_{0*}(\epsilon_n^{\mathcal{G}})"'] & f_{0*}((f_0^{-1}\mathcal{P}^n \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f_0^{-1}\mathcal{F}) \underset{f_0^{-1}\mathcal{P}^n}{\otimes} (f_0^{-1}\mathcal{P}^n \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{G})) \arrow[d, "f_{0*}(f_0^{-1}\epsilon_n^{\mathcal{F}}\otimes\epsilon_n^{\mathcal{G}})"] \\
(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n) \otimes_{\mathcal{P}^n} f_{0*}(\mathcal{G} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f_0^{-1}\mathcal{P}^n) \arrow[r] & f_{0*}((f_0^{-1}\mathcal{F} \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f_0^{-1}\mathcal{P}^n) \underset{f_0^{-1}\mathcal{P}^n}{\otimes} (\mathcal{G} \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f_0^{-1}\mathcal{P}^n)),
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les morphismes de projections. En outre, le lemme 1.2.16 nous donne le diagramme commutatif

(1.2.20.3)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \arrow[d] \\
(\mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \underset{\mathcal{P}^n}{\otimes} f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{P}^n \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{G}) \arrow[r] & f_{0*}((f_0^{-1}\mathcal{P}^n \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f_0^{-1}\mathcal{F}) \underset{f_0^{-1}\mathcal{P}^n}{\otimes} (f_0^{-1}\mathcal{P}^n \underset{f_0^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{G})),
\end{tikzcd}$$

de même avec $\mathcal{P}^n$ muni de la structure gauche de $\mathcal{O}_X$-module. En composant de haut en bas 1.2.20.3 pour la structure droite de $\mathcal{P}^n$, puis 1.2.20.2 et enfin 1.2.20.3 pour la structure gauche, on obtient le diagramme canonique commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_n^{\mathcal{F}\otimes f_{0*}(\epsilon_n^{\mathcal{G}})}"'] & \mathcal{P}^n \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \arrow[d, "\epsilon_n^{f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F}\otimes\mathcal{G})}"] \\
(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n \arrow[r] & f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}^n.
\end{tikzcd}$$

On a donc montré que le morphisme de projection est $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire.

La compatibilité à Frobenius est locale en X et on peut supposer que $F^{(s)}_{X_0/S_0}$ se relève en un morphisme F_X. Comme le foncteur $F_X^*\mathcal{D}^{(m)}_{X'} \otimes_{\mathcal{D}^{(m)}_{X'}} -$ (resp. $f_0^{-1}F_X^*\mathcal{D}^{(m)}_{X'} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{D}^{(m)}_{X'}} -$) est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} -$ (resp. $f_0^{-1}\mathcal{O}_X \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_{X'}} -$), celle-ci se vérifie alors de la même façon en utilisant 1.2.16. □

Proposition 1.2.21. — *Soient $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ et $\mathcal{G} \in D({}^g f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)})$. On dispose de l'isomorphisme de projection $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius*

$$\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}f_{0*}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}).$$

Démonstration. — Soient $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{G}$ par des $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche f_{0*}-acycliques et $\mathcal{P}$ une résolution gauche à degré borné de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche plats. On a alors les morphismes canoniques (1.2.20.1) :

$$\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}f_{0*}\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_{0*}(\mathcal{I}) \to f_{0*}(f_0^{-1}(\mathcal{P}) \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{I}) \to \mathbb{R}f_{0*}(f_0^{-1}(\mathcal{P}) \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{I}).$$

De plus, comme $f_0^{-1}(\mathcal{P})$ est une résolution gauche à degré borné de $f_0^{-1}(\mathcal{F})$ par des $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-modules à gauche plats, le morphisme $f_0^{-1}(\mathcal{P}) \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \to f_0^{-1}(\mathcal{P}) \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{I}$ est un isomorphisme.

Or, on a l'isomorphisme tautologique $f_0^{-1}(\mathcal{P}) \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \tilde{\to} f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. D'où la construction d'un morphisme $\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire et compatible à Frobenius

$$\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}f_{0*}\mathcal{G} \to \mathbb{R}f_{0*}(f_0^{-1}\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{G}).$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de prouver que celui-ci est un isomorphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire. Cette assertion étant locale en X, on peut supposer X affine. En utilisant le lemme sur les foncteurs way-out ([**Har66**, I.7.1.(ii)et (iv)]), comme $\mathcal{F}$ est à cohomologie $\mathcal{O}_X$-quasi-cohérente, on se ramène à supposer que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre. Comme f_0 est quasi-compact et quasi-séparé, le foncteur $\mathbb{R}f_{0*}$ commute aux limites inductives ([S.G.A.4, VI.5.1.]). On est donc ramené à supposer le faisceau $\mathcal{F}$ égal à $\mathcal{O}_X$. D'où la proposition. □

Maintenant, dégageons les trois lemmes qui suivent et dont on se servira lors de la démonstration de la proposition 1.2.25. Cette dernière, avec la formule de projection 1.2.21, nous permettra de prouver la commutation de la cohomologie locale à l'image directe d'un morphisme plat 1.2.26.

Lemme 1.2.22. — *Soient $\mathcal{E}$ un complexe de $D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ (resp. $D^-({}^*\mathcal{D}_X^{(m)},{}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$) et $\mathcal{F}$ un complexe de $D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$. On a l'isomorphisme dans $D^-({}^g\mathcal{D}_Y^{(m)})$ (resp. $D^-({}^*f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},{}^g\mathcal{D}_Y^{(m)})$) :*

$$\mathbb{L}f^*_{0,\,d}(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}) \tilde{\to} \mathbb{L}f^*_{0,\,d}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{L}f_0{}^*\mathcal{F},$$

l'indice d signifiant que l'on a pris la structure droite pour le calcul de l'image inverse.

Démonstration. — Analogue à [**Ber00**, 3.3.1]. □

Lemme 1.2.23. — *Soient $\mathcal{M}$ un complexe de $D^-({}^gf_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},{}^d\mathcal{D}_Y^{(m)})$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux complexes de $D^-({}^g\mathcal{D}_Y^{(m)})$. On a alors un isomorphisme canonique $f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}$-linéaire :*

$$(\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}).$$

Démonstration. — Les isomorphismes $\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \tilde{\to} (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{D}_Y^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \tilde{\to} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathcal{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E})$ sont $\mathcal{D}_Y^{(m)}$-linéaires à droite (pour le deuxième cela résulte fonctoriellement de [**Car02**, 1.5.9.1]). Le complexe $\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$ est donc canoniquement un objet de $D^-({}^gf_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},{}^d\mathcal{D}_Y^{(m)})$.

On déduit de l'isomorphisme de transposition $\mathcal{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E} \tilde{\to} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y^{(m)}$, les suivants $\mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathcal{D}_Y^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y^{(m)}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{M} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F})$. □

Lemme 1.2.24. — *Soient $\mathcal{E} \in D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$ et $\mathcal{F} \in D^-({}^g\mathcal{D}_X^{(m)},{}^g\mathcal{D}_X^{(m)})$. On a un isomorphisme dans $D^-({}^gf_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},{}^g\mathcal{D}_Y^{(m)})$:*

$$f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathbb{L}f^*_{0,\,d}\,\mathcal{F} \tilde{\to} \mathbb{L}f^*_{0,\,d}(\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}),$$

les structures de $\mathcal{D}$-modules des produits tensoriels provenant de la structure gauche de $\mathcal{F}$.

Démonstration. — En prenant des résolutions plates de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{F}$, on se ramène à prouver que, pour $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module à gauche et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodule à gauche, on dispose d'un isomorphisme de $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, \mathcal{D}_Y^{(m)})$-bimodules à gauche : $f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f^*_{0,\,d}\,\mathcal{F} \tilde{\to} f^*_{0,\,d}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$.

Tout d'abord, on vérifie par fonctorialité que $f^*_{0,d}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathcal{D}_X^{(m)}$-bimodules à gauche dans celle des $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)},\ \mathcal{D}_Y^{(m)})$-bimodules à gauche. De plus, on dispose des isomorphismes $f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f^*_{0,\,d}\,\mathcal{F} \tilde{\to} (f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}} f^*_{0,\,d}\,\mathcal{F}$ et $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \tilde{\to} (\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}) \otimes_{\mathcal{D}_X^{(m)}} \mathcal{F}$. Les faisceaux $f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f^*_{0,\,d}\,\mathcal{F}$ et $f^*_{0,\,d}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$ sont donc bien munis d'une structure de $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, \mathcal{D}_Y^{(m)})$-bimodule à gauche.

Enfin, en posant $\mathcal{M} = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$, on vérifie fonctoriellement et par recollement que l'isomorphisme canonique $f_0^{-1}\mathcal{M} \otimes_{f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}} f^*_{0,\,d}\,\mathcal{F} \tilde{\to} f^*_{0,\,d}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X^{(m)}} \mathcal{F})$ est $(f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, \mathcal{D}_Y^{(m)})$-linéaire. □

Proposition 1.2.25. — *Soient* $\mathcal{E} \in D^{-}({}^{g}\mathcal{D}_X^{(m)})$ *et* $\mathcal{F} \in D^{-}({}^{g}\mathcal{D}_Y^{(m)})$. *On a un isomorphisme* $f_0^{-1}\mathcal{D}_X$*-linéaire :*

$$(f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathbb{L}f_0^{*}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}).$$

Démonstration. — Il résulte de 1.2.24 l'isomorphisme :

$$f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} f_{0,\,d}^{*}(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \tilde{\to} \mathbb{L}f_{0,\,d}^{*}\left(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})\right). \tag{1.2.25.1}$$

En lui appliquant le foncteur $\mathbb{L}f_{0,\,d}^{*}$ à l'isomorphisme de transposition ([**Ber00**, 1.3.1]), on obtient un isomorphisme dans $D({}^{g}f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, {}^{g}\mathcal{D}_Y^{(m)})$:

$$\mathbb{L}f_{0,\,d}^{*}\left(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})\right) \tilde{\to} \mathbb{L}f_{0,\,d}^{*}\left((\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}\right). \tag{1.2.25.2}$$

Ensuite, comme la structure droite de $(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ est la structure produit tensoriel, d'après 1.2.22 on a un isomorphisme dans $D({}^{g}f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, {}^{g}\mathcal{D}_Y^{(m)})$:

$$\mathbb{L}f_{0,\,d}^{*}\left((\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}\right) \tilde{\to} f_{0,\,d}^{*}(\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{L}f_0^{*}(\mathcal{E}). \tag{1.2.25.3}$$

Il en résulte, en composant les isomorphismes 1.2.25.1, 1.2.25.2, 1.2.25.3, puis en appliquant le foncteur $- \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y^{-1}$, un isomorphisme dans $D({}^{g}f_0^{-1}\mathcal{D}_X^{(m)}, \mathcal{D}_Y^{(m)\,d})$:

$$f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \tilde{\to} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{L}f_0^{*}(\mathcal{E}).$$

Or, le lemme 1.2.23 donne :

$$(\mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{L}f_0^{*}(\mathcal{E})) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathbb{L}f_0^{*}(\mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}).$$

D'où le résultat. □

Théorème 1.2.26. — *On suppose qu'il existe un entier N tel que pour tout entier n, le faisceau d'anneaux $\mathcal{P}^n_{(m),\alpha}(\mathfrak{I})$ est de dimension parfaite inférieure à N.*

Pour tout complexe $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}({}^{g}\mathcal{D}_Y^{(m)})$, on dispose de l'isomorphisme dans $D_{\mathrm{qc,tdf}}({}^{g}\mathcal{D}_X^{(m)})$

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+}(\mathbb{L}f_0^{*}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X)) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}).$$

Si f_0 es plat, on a

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}(\mathcal{F}).$$

Démonstration. — D'après [**Ber02**, 2.4.5] $f_{0+}(\mathcal{F}) \in D_{\mathrm{qc,tdf}}({}^{g}\mathcal{D}_X^{(m)})$. On obtient alors (1.1.7) un isomorphisme

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} f_{0+}(\mathcal{F}).$$

Grâce aux hypothèses faites, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X) \in D_{\mathrm{qc,tdf}}({}^{g}\mathcal{D}_X^{(m)})$. On en déduit l'isomorphisme (1.2.21)

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} f_{0\,+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} \mathbb{R}f_{0*}\left(f_0^{-1}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X)) \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F})\right).$$

Or, (1.2.25) $(f_0^{-1}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X)) \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_Y^{(m)}} (\mathbb{L}f_0^{*}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X)) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F})$. En appliquant le foncteur $\mathbb{R}f_{0*}$ à ce dernier isomorphisme et en composant tous nos isomorphismes on obtient celui-ci :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X} \circ f_{0\,+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+}(\mathbb{L}f_0^{*}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X)) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F})).$$

Si f_0 est plat, d'après la proposition 1.2.4, $f_0^{*}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_X}(\mathcal{O}_X)) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_Y}(\mathcal{O}_Y)$. □

Proposition 1.2.27. — *Soient* $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{qc,tdf}}({}^{g}\mathcal{D}_X^{(m)})$ *et* $\mathcal{F} \in D({}^{g}\mathcal{D}_X^{(m)})$. *On a alors un isomorphisme :*

$$\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+}(\mathbb{L}f_0^{*}(\mathcal{E}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}).$$

Démonstration. — Il résulte de 1.2.21 l'isomorphisme :
$\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_X} f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\rightarrow} \mathbb{R}f_{0*}((f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_Y} \mathcal{F})$. Or, grâce à 1.2.25, on bénéficie de l'isomorphisme $\mathbb{R}f_{0*}((f_0^{-1}\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{f_0^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_Y} \mathcal{F}) \tilde{\rightarrow} \mathbb{R}f_{0*}(\mathcal{D}^{(m)}_{X\leftarrow Y} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}^{(m)}_Y} (\mathbb{L}f_0^*\mathcal{E} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}))$. □

2. Cohomologie locale sur les schémas formels

La lettre $s \geq 1$ désigne toujours un entier et on supposera l'entier m assez grand pour que $\mathfrak{m}$ possède une $m-1$-PD-structure. On note $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ et, pour tout entier $i \geq 0$, $S_i := \operatorname{Spec} \mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$ et $S = S_0$ (si aucune confusion n'est à craindre). De même, si $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, on note $X_i := \mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\mathfrak{m}^{i+1}$ et $X = X_0$.

On se donne un morphisme $f_0 : Y \to X$ quasi-compact et quasi-séparé de S_0-schémas lisses. On suppose que X, Y se relèvent en des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$. On fixe $\sigma : \mathcal{V} \tilde{\rightarrow} \mathcal{V}$ un automorphisme relevant la puissance s-ième de l'automorphisme de Frobenius de k. Avec les notations de 1, on remarque que $\mathfrak{X}^\sigma$, le $\mathcal{V}$-schéma formel déduit de $\mathfrak{X}$ par le changement de base défini par σ, donne un relèvement de $X_0^{(s)}$. De même, si $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un relèvement de f_0 alors f^σ relève $f^{(s)} : Y^{(s)} \to X^{(s)}$.

Rappelons comment est construit le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini* $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$: pour tout entier m, on complète pour la topologie p-adique $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$, on tensorise ce dernier faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ par $\mathbb{Q}$ (si $\mathcal{E}$ est un faisceau en groupe sur $\mathfrak{X}$, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$), puis on passe à la limite inductive sur le niveau m.

Enfin, F^*_X, ou plus simplement F^*, désignera le foncteur induit par l'image inverse de Frobenius de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\sigma,\mathbb{Q}}$-modules dans celle des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules.

Dans la première partie de cette section, nous reprenons sur les schémas formels la définition [**Ber02**, 4.4.5-6] de la cohomologie locale à support strict dans un sous-schéma fermé T de X, mais seulement dans le cas où T est un diviseur. Toutes les propriétés de la section précédente sont alors validées.

Dans la deuxième partie, nous traitons le cas général. Nous y définirons d'une manière différente de celle de Berthelot ([**Ber02**, 4.4.5-6]) la cohomologie locale. Le but de ce changement est d'obtenir en particulier la commutation de la cohomologie locale avec l'image directe et l'image inverse extraordinaire d'un morphisme quelconque (une immersion fermée par exemple). Enfin, on peut penser que les deux définitions coïncident.

2.1. Cas d'un diviseur. —

2.1.1. — Reprenons les notations de [**Ber02**, 3.2]. Soit $X_.$ le topos des systèmes projectifs de faisceaux $E_. = (E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sur $\mathfrak{X}$. Pour tout m, nous munirons $X_.$ du système projectif d'anneaux $(\mathcal{D}^{(m)}_{X_i})_{i\in\mathbb{N}}$, que l'on notera $\mathcal{D}^{(m)}_{X_.}$. On note $\underleftarrow{l}_X : (X_.,\mathcal{D}^{(m)}_{X_.}) \to (\mathfrak{X},\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ le morphisme de topos annelés défini en posant

$$\underleftarrow{l}_{X*}(E_.) := \varprojlim_i E_i, \quad \underleftarrow{l}_X^{-1}(E) := (E)_{i\in\mathbb{N}},$$

où $(E)_{i\in\mathbb{N}}$ est le système projectif constant de valeur E. Berthelot ([**Ber02**, 3.2]) définit une sous-catégorie pleine de $D^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$, celle des complexes quasi-cohérents qu'il note $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$.

On considérera aussi par la suite, le topos $\mathfrak{X}^{(\cdot)}$, des systèmes inductifs de faisceaux $(E^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$sur $\mathfrak{X}$, annelé par le système inductif de faisceaux d'anneaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}} = (\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})_{m\in\mathbb{N}}$. En effectuant deux localisations (qui remplacent la tensorisation par $\mathbb{Q}$ et le passage à la limite) sur la catégorie $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$, on obtient la catégorie $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ (pour plus de détails, voir [**Ber02**, 4.2.1]). Enfin, on rappelle que la catégorie des complexes de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à cohomologie bornée et cohérente, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, est une sous-catégorie pleine de $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$.

Définition 2.1.2. — Suivant la convention de Berthelot ([**Ber02**, 5.1]), un *F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module* sur $\mathfrak{X}$ est la donnée d'un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\Phi\colon \mathcal{E}\tilde{\to}F^*\mathcal{E}^\sigma$ (où $\mathcal{E}^\sigma$ est le $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}^\sigma,\mathbb{Q}}$-module déduit de $\mathcal{E}$ par le changement de base σ). Les morphismes de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules sont les morphismes $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaires commutant à l'action de Frobenius.

De même, nous appellerons *F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-complexes* la donnée d'un complexe $\mathcal{E}\in D(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\mathcal{D}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$) et d'un isomorphisme $\Phi\colon \mathcal{E}\tilde{\to}F^*\mathcal{E}^\sigma$ dans $D(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\mathcal{D}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$).

On notera F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (resp. F-$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\mathcal{D}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$) la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-complexes objets de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ (resp. $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\mathcal{D}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$).

2.1.3. — Soient T un diviseur de X et $\mathfrak{I}\subset\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ l'idéal définissant l'immersion fermée $T\hookrightarrow X\hookrightarrow\mathfrak{X}$.

Pour tout i, les immersions fermées canoniques $T\hookrightarrow X\hookrightarrow X_i$ donne un foncteur

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_T \;:\; D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_{X_i})\to D({}^g\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}).$$

Pour tout objet $\mathcal{E}$ de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$, on pose $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_T(\mathcal{E}):=\mathbb{R}\underleftarrow{l}_{X*}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_T(\mathbb{L}\underleftarrow{l}^*_X\mathcal{E})$.

On étend ensuite le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_T$ aux systèmes inductifs pour m variable puis on obtient par passage aux catégories localisées un foncteur

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_T \;:\; \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})\to\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}}),$$

que l'on appelle ([**Ber02**, 4.4.5]) *cohomologie locale à support strict dans* T (surconvergent). Celui-ci commutant à l'action de Frobenius, il induit un foncteur dans F-$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$.

Enfin, grâce à 1.2.11, si $T\subset T'$ sont deux diviseurs de X, on dispose d'un morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T\to\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'}$ compatible à Frobenius, i.e., d'un morphisme dans F-$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$.

2.1.4. — On rappelle que dans ces catégories localisées (i.e. de la forme $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$), le produit tensoriel $\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger-$, l'image directe $f_{0,+}$, l'image inverse $\mathbb{L}f_0^*$ et l'image inverse extraordinaire $f_0^!$ dérivent de façon analogue à 2.1.3 de leur définition sur les schémas X_i : on complète à chaque niveau m puis on localise (pour plus de précisions, voir [**Ber02**, 4.3]). L'intérêt fondamental de cette construction réside dans le fait que les propriétés vérifiées (notamment les isomorphismes) sur les schémas restent valables sur les schémas formels.

Par exemple, il résulte de 1.2.27 que pour tous $\mathcal{E}\in F$-$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ et $\mathcal{F}\in F$-$\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathcal{Y}})$, on bénéficie de l'isomorphisme

$$f_{0+}(\mathcal{F})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}[d_{Y/X}]\tilde{\to}f_{0+}(\mathcal{F}\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}}}f_0^!(\mathcal{E})).$$

Remarque 2.1.5. — Les hypothèses de 1.2.6 sont vérifiées. De plus, comme $\mathfrak{X}$ est $\mathcal{V}$-lisse, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ est de dimension cohomologique globale finie. Les faisceaux $\mathcal{P}^n_{\mathfrak{X},(m)}(\mathfrak{I})$ sont donc d'amplitudes parfaites bornées indépendamment de n. Enfin, les catégories $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ et $D_{\mathrm{qc,tdf}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ coïncident, i.e., si $\mathcal{E}$ est un objet de la première catégorie, alors pour tout entier i, $\mathcal{D}^{(m)}_{X_i}\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{E}$ est de Tor-dimension finie. Comme nous ne travaillons qu'avec des complexes au moins quasi-cohérent, on pourra donc utiliser toutes les propositions de la section précédente nécessitant des hypothèses de Tor-dimension finie.

Remarque 2.1.6. — La définition ci-dessus de la cohomologie locale à support strict est encore valable lorsque T est un sous-schéma fermé quelconque de X, ce qui correspond à la définition donnée par Berthelot ([**Ber02**, 4.4.5]). Avec celle-ci, toutes les propositions de la section 2.1 se généralisent aussitôt au cas général.

Proposition 2.1.7. — *Le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}$ ne dépend que de l'espace sous-jacent de T.*

Démonstration. — Soit T_{red} le sous-schéma réduit induit par T. Il existe un entier N tel que $T_{\mathrm{red}} \hookrightarrow T \hookrightarrow T^{(N)}_{\mathrm{red}}$. Grâce au diagramme de gauche de 1.2.7.1, le morphisme composé $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_{\mathrm{red}}} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T^{(N)}_{\mathrm{red}}} \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+N)}_{T_{\mathrm{red}}}$ (resp. $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T^{(N)}_{\mathrm{red}}} \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+N)}_{T_{\mathrm{red}}} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+N)}_{T}$) est le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T_{\mathrm{red}}} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+N)}_{T_{\mathrm{red}}}$ (resp. $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m)}_{T} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{(m+N)}_{T}$). En passant à la limite sur le niveau, on en déduit que le morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_{\mathrm{red}}} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}$ est un isomorphisme. □

Proposition 2.1.8. — *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. Il existe dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ un isomorphisme canonique compatible à Frobenius et fonctoriel en $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ et T :*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{F} \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}).$$

Démonstration. — Cela résulte de la proposition 1.1.7. □

Proposition 2.1.9. — *Soient T_X un diviseur de X et $T_Y := f_0^{-1}(T_X)$ (qui est un diviseur si f_0 est plat). Soient $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ et $\mathcal{F} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{Y}})$. On dispose de l'isomorphisme :*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+}((\mathbb{L}f_0{}^{*}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}). \tag{2.1.9.1}$$

Si f_0 est plat, on a les isomorphismes canoniques (le deuxième étant compatible à Frobenius) :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y}(\mathcal{F}), \quad f_0^{!} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0^{!}(\mathcal{E}).$$

Démonstration. — 1.2.26 et 1.2.13. □

2.2. Cas général. —

2.2.1. — Nous aurons besoin des deux ingrédients fondamentaux suivants. Soient T un diviseur de X et $\mathfrak{Y}$ l'ouvert $\mathfrak{X} \setminus T$. Berthelot construit le *faisceau des fonctions sur $\mathfrak{Y}$ à singularités surconvergentes le long de T*, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ ([**Ber96a**, 4.2.4]), et le *faisceau des opérateurs différentiels de niveau fini, à singularités surconvergentes*, $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ ([**Ber96a**, 4.2.5]).

Pour tout $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{g}\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$, on dispose du triangle de localisation (ceci est expliqué dans la section [**Ber02**, 5.3.6]) :

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to ({}^{\dagger}T)(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{E})[1],$$

où $({}^{\dagger}T)(\mathcal{E})$ désigne $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$. Ensuite, pour tous diviseurs $T_1, \ldots, T_{r+1}$ de X, le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_1} \circ \cdots \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_r}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_{r+1})_{\mathbb{Q}})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérent (cela résulte de [**Ber96b**] et du triangle de localisation ci-dessus).

Définition 2.2.2. — Soient Z un sous-schéma fermé de X et $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^{g}\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. On dit que $\mathcal{E}$ est à support dans Z si ses espaces de cohomologie le sont.

Lemme 2.2.3. — *Soient T et H deux diviseurs de X et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent (resp. un objet de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H)_{\mathbb{Q}})$). Alors $\mathcal{E}$ est à support dans T si et seulement si le morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Traitons le premier cas, le deuxième s'en déduisant aussitôt. Comme le faisceau $({}^{\dagger}T)(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T \cup H)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H)_{\mathbb{Q}}} \mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T \cup H)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans $T \cup H$, il est nul. Le triangle de localisation en T nous permet de conclure. □

Proposition 2.2.4. — *Soient Z un sous-schéma fermé de X, $Z_1,\ldots,Z_r$ (resp. $Z'_1,\ldots,Z'_s$) des diviseurs de X tels que $Z=\cap_{l=1,\ldots,r}Z_l$ (resp. $Z=\cap_{l=1,\ldots,s}Z'_l$) et $\mathcal{E}\in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. Il existe alors un isomorphisme canonique compatible à Frobenius*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}\mathcal{E}\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_s}\mathcal{E}.$$

Démonstration. — Comme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérente, grâce à 2.2.3 et à 2.1.3, le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_s}\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\to\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme compatible à Frobenius. Par symétrie et en remarquant que la proposition 2.1.8 implique que les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_i}$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_j}$ commutent canoniquement, on en déduit un isomorphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'_s}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$.

Or, on déduit par récurrence sur r de la proposition 2.1.8 que l'on a un isomorphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_r}(\mathcal{E})$. De même en remplaçant Z par Z' et r par s. D'où le résultat. □

Remarque 2.2.5. — Soit Z un sous-schéma fermé réduit de X. Alors, Z est une intersection finie de diviseurs de X. En effet, si (X_i) est un recouvrement fini d'ouverts affines de X, il existe un nombre fini de diviseurs T_{i,j_i} de X_i tels que $Z\cap X_i=\cap_{j_i}T_{i,j_i}$. On remarque ensuite que $Z=\cap_{i,j_i}\overline{T_{i,j_i}}$, où $\overline{T_{i,j_i}}$ est l'adhérence schématique de T_{i,j_i} dans X.

Définition 2.2.6. — Soient Z un sous-schéma fermé de X et $T_1,\ldots,T_r$ des diviseurs de X tels que $Z=\cap_{l=1,\ldots,r}T_l$. Pour tout $\mathcal{E}\in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$, on notera $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})$ le complexe $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_1}\circ\cdots\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_r}(\mathcal{E})$, qui ne dépend que de Z (2.2.4) à isomorphisme canonique près. On l'appelle *foncteur cohomologique local à support strict dans Z (surconvergent)*. De plus, on désignera par $\mathcal{H}^{\dagger,r}_{Z}(\mathcal{E})$ son r-ième espace de cohomologie.

Le choix de diviseurs $T_1,\ldots,T_r$ d'intersection Z fourni un morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})\to\mathcal{E}$. Celui-ci ne dépend pas du choix des diviseurs (à isomorphisme canonique près).

En notant $({}^{\dagger}Z)(\mathcal{E})$ le cône de $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})\to\mathcal{E}$, on obtient le *triangle distingué de localisation en Z de $\mathcal{E}$*: $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})\to\mathcal{E}\to({}^{\dagger}Z)(\mathcal{E})\to\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})[1]$.

Il résulte de 2.1.7 que le foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}$ ne dépend que de l'espace sous-jacent à Z.

De plus, on déduit de 2.1.8 les isomorphismes canoniques fonctoriels en Z:

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E}),\ ({}^{\dagger}Z)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\mathcal{E}\tilde{\to}({}^{\dagger}Z)(\mathcal{E}). \tag{2.2.6.1}$$

Il résulte de 2.2.6.1 les isomorphismes de commutativité:

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}(\mathcal{E}),\ ({}^{\dagger}Z')({}^{\dagger}Z)(\mathcal{E})\tilde{\to}({}^{\dagger}Z)({}^{\dagger}Z')(\mathcal{E})\text{ et }\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}\circ({}^{\dagger}Z')(\mathcal{E})\tilde{\to}({}^{\dagger}Z')\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E}).$$

Remarque 2.2.7. — On note $\mathfrak{X}_K$ l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{X}$ et $\mathrm{sp}\colon\mathfrak{X}_K\to\mathfrak{X}$ le morphisme de spécialisation. Soient Z et Z' deux sous-schémas fermés de X, j_Z l'immersion ouverte $X\setminus Z\hookrightarrow X$, $j^{\dagger}_{Z}$ le *foncteur des germes de sections surconvergentes le long de Z* ([**Ber96c**, 2.1.1]) et $\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z'[}$ le *foncteur des sections à support dans le tube* $]Z'[$ ([**Ber96c**, 2.1.6]).

On a alors l'isomorphisme: $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*\underline{\Gamma}^{\dagger}_{]Z'[}j^{\dagger}_{Z}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}\circ({}^{\dagger}Z)\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. En effet, en utilisant des triangles de locations, il suffit de le vérifier pour Z vide. En fait, on le prouve pour Z un diviseur de X en effectuant une récurrence sur le nombre minimum de diviseurs dont l'intersection donne Z' (à nouveau grâce à des triangles de localisations).

Théorème 2.2.8. — *Soient Z, Z' deux sous-schémas fermés de X et $\mathcal{E}\in \underset{\longrightarrow}{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. On a un isomorphisme compatible à Frobenius et fonctoriel en Z et Z' :*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cap Z'}(\mathcal{E}).$$

Démonstration. — 2.2.4. □

Généralisons maintenant 2.2.3.

Proposition 2.2.9. — *Soient H un diviseur de X, Z un sous-schéma fermé de X, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent (resp. un objet de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H)_{\mathbb{Q}})$). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{E}$ est à support dans Z,*
2. *Le morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme,*
3. *$({}^\dagger Z)(\mathcal{E}) = 0$.*

Démonstration. — Prouvons $1 \Rightarrow 2$. Si T est un diviseur contenant Z, d'après 2.2.3, le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme. Comme Z est une intersection finie de diviseur de X le contenant on conclut $1 \Rightarrow 2$. La réciproque $2 \Rightarrow 1$ est évidente tandis que le triangle de localisation en Z conduit à l'équivalence entre les assertions 2 et 3. □

Corollaire 2.2.10. — *Soient H un diviseur de X, Z un sous-schéma fermé de X, $\mathcal{E}$ un complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H)_{\mathbb{Q}})$. Alors $({}^\dagger Z)(\mathcal{E}) = 0$ si et seulement si pour tout entier r, $({}^\dagger Z)(\mathcal{H}^r(\mathcal{E})) = 0$.*

Remarque 2.2.11. — Soient Z un sous-schéma fermé de X et $\mathcal{E}$ un complexe de $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ vérifiant $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}) = 0$. En général, il est faux que ses espaces de cohomologie vérifie $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{H}^r(\mathcal{E})) = 0$.

Par exemple, si Z est un sous-schéma fermé lisse de X de codimension pure 2, 2.2.12 donne $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(({}^\dagger Z)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) = 0$. Or, en utilisant le triangle de localisation en Z de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, on obtient $\mathcal{H}^1(({}^\dagger Z)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})) \tilde{\to} \mathcal{H}^{\dagger,2}_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Enfin, comme $\mathcal{H}^{\dagger,2}_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans Z, alors $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{H}^1(({}^\dagger Z)(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))) \tilde{\to} \mathcal{H}^{\dagger,2}_Z(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \neq 0$.

Proposition 2.2.12. — *Soient $Z \subset Z'$ deux sous-schémas fermés de X et $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. On a alors $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z \circ ({}^\dagger Z')(\mathcal{E}) = 0$.*

Démonstration. — En appliquant le foncteur cohomologique local $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z$ au triangle distingué $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z'}(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to ({}^\dagger Z')(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z'}(\mathcal{E})[1]$, le théorème 2.2.8 nous permet de conclure. □

Lemme 2.2.13. — *Soient Z et Z' deux sous-schémas fermées de X. On a : $({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z') \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z\cup Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{E} = ({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z') \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z\cup Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, $\mathcal{Y} = \mathfrak{X} \setminus Z$ et $|_{\mathcal{Y}}$ le foncteur restriction à $\mathcal{Y}$. On a $|_{\mathcal{Y}} \circ ({}^\dagger Z) \tilde{\to} |_{\mathcal{Y}}$, $|_{\mathcal{Y}} \circ ({}^\dagger Z') \tilde{\to} ({}^\dagger Z' \cap Y) \circ |_{\mathcal{Y}}$ et $|_{\mathcal{Y}} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z\cup Z'} \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z'\cap Y} \circ |_{\mathcal{Y}}$. On en déduit que $\mathcal{E}$ est à support dans Z. Il résulte alors de 2.2.9 que $({}^\dagger Z)(\mathcal{E}) = 0$. Or, grâce à 2.2.12, $({}^\dagger Z) \to ({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z)$ est un isomorphisme de foncteurs et donc que $\mathcal{E} \to ({}^\dagger Z)(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. □

Théorème 2.2.14. — *Soient Z, Z' deux sous-schémas fermés de X et $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. On a un isomorphisme compatible à Frobenius et fonctoriel en Z et Z' :*

$$({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z')(\mathcal{E}) \tilde{\to} ({}^\dagger Z \cup Z')(\mathcal{E}).$$

Démonstration. — Tout d'abord, le morphisme $({}^\dagger Z \cup Z')(\mathcal{E}) \to ({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z')({}^\dagger Z \cup Z')(\mathcal{E})$ est un isomorphisme (2.2.12). Enfin, il résulte de 2.2.13 que le morphisme $({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z')(\mathcal{E}) \to ({}^\dagger Z) \circ ({}^\dagger Z') \circ ({}^\dagger Z \cup Z')(\mathcal{E})$ est un isomorphisme. □

Afin de prouver le théorème suivant, on aura besoin du lemme ci-après.

Lemme 2.2.15. — *Soient $\mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}'[1]$ un triangle dans $\underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ et Z un sous-schéma fermé de X. Celui-ci est distingué si et seulement si les triangles obtenus après application des foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z$ et $({}^\dagger Z)$ sont distingués.*

Théorème 2.2.16. — *Soient Z, Z' deux sous-schémas fermés de X et $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$. On a les triangles distingués de localisation de Mayer-Vietoris*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cap Z'}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E}) \oplus \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cup Z'}(\mathcal{E}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cap Z'}(\mathcal{E})[1] \tag{2.2.16.1}$$

$$({}^{\dagger}Z\cap Z')(\mathcal{E}) \to ({}^{\dagger}Z)(\mathcal{E}) \oplus ({}^{\dagger}Z')(\mathcal{E}) \to ({}^{\dagger}Z\cup Z')(\mathcal{E}) \to ({}^{\dagger}Z\cap Z')(\mathcal{E})[1]. \tag{2.2.16.2}$$

Démonstration. — Contentons-nous de démontrer que le triangle 2.2.16.1 est distingué, le deuxième se prouvant de la même façon. Grâce à 2.2.6.1, il suffit de le prouver pour $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Or, les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}$ et $({}^{\dagger}Z)$ appliqués au triangle 2.2.16.1 pour $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ donnent respectivement

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cap Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z} \oplus \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cap Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z} \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cap Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})[1]$$
$$0 \to 0 \oplus ({}^{\dagger}Z)\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to ({}^{\dagger}Z)\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cup Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to 0.$$

Il est immédiat que le premier triangle est distingué tandis que le dernier l'est si et seulement si le morphisme $({}^{\dagger}Z)\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to ({}^{\dagger}Z)\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z\cup Z'}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme. Or, il résulte de 2.2.9 qu'il suffit de le vérifier au-dessus de $X \setminus Z$, ce qui est immédiat. Grâce à 2.2.15, on conclut que 2.2.16.1 est distingué. □

Théorème 2.2.17. — *Soient Z_X un sous-schéma fermé de X, $Z_Y := f_0^{-1}(Z_X)$, $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ et $\mathcal{F} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{Y}})$. On a des isomorphismes fonctoriels en Z_X et compatibles à Frobenius :*

$$f_0^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_X}(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_Y} \circ f_0^!(\mathcal{E}),\ f_0^! \circ ({}^{\dagger}Z_X)(\mathcal{E}) \tilde{\to} ({}^{\dagger}Z_Y) \circ f_0^!(\mathcal{E}) \tag{2.2.17.1}$$

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_Y}(\mathcal{F}),\ ({}^{\dagger}Z_X) \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+} \circ ({}^{\dagger}Z_Y)(\mathcal{F}). \tag{2.2.17.2}$$

Démonstration. — En premier lieu, on remarque que si le théorème est validé sans structures de Frobenius alors il l'est avec celles-ci. En effet, les morphismes canoniques compatibles à Frobenius (et ce, quel que soit l'isomorphisme de commutation de l'image directe à Frobenius choisi) $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_X} \circ f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_Y}(\mathcal{F}) \to f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_Y}(\mathcal{F})$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_X} \circ f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_Y}(\mathcal{F}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F})$ seraient alors des isomorphismes. On procède de même pour l'image inverse extraordinaire.

Oublions donc Frobenius. En utilisant les triangles de localisation, il suffit de prouver les isomorphismes de droites de 2.2.17.1 et de 2.2.17.2. Commençons par celui de 2.2.17.1.

Le morphisme f_0 se décompose en une immersion fermée suivant d'un morphisme lisse. Lorsque f_0 est lisse, cela résulte de la section précédente (2.1.9). On se ramène ainsi au cas où f_0 est une immersion fermée.

Soient T_X un diviseur contenant Z_X et $T_Y = T_X \cap Y$. On aura besoin des deux lemmes.

Lemme 2.2.18. — *Le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'assertion est locale en Y. On peut donc supposer que Y est irréductible. On a alors deux cas à traiter :

1. $T_Y = Y$;
2. T_Y est un diviseur de Y.

Commençons par traiter le premier cas. On vérifie par un calcul local, que $Y \subset T_X$ implique que $f_0^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_X)_{\mathbb{Q}}) = 0$. Il découle de cette dernière égalité que le morphisme $f_0^!\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to f_0^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme, ce qui implique le lemme pour ce premier cas.

De plus, le deuxième cas entraîne l'isomorphisme $f_0^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_X)_{\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}({}^{\dagger}T_Y)_{\mathbb{Q}}$ (cela résulte de **[Huy95]** par recollement). Il en dérive $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} f_0^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}T_X)_{\mathbb{Q}}) = 0$ et donc que le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme. □

Lemme 2.2.19. — *Le morphisme* $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \to f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — En premier lieu, on vérifie que le complexe $\mathbb{L}f_0{}^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_X)_{\mathbb{Q}})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$-cohérente. Cette assertion est local en Y et on se ramène au cas où Y est irréductible. Examinons les deux cas possibles : soit $T_Y = Y$ soit T_Y est un diviseur de Y. Rappelons que lors de la preuve de 2.2.18, on a vérifié que le premier cas induit $\mathbb{L}f_0{}^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_X)_{\mathbb{Q}}) = 0$ tandis que dans le deuxième cas produit l'isomorphisme $\mathbb{L}f_0{}^*(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T_X)_{\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathcal{O}_{\mathfrak{Y}}({}^\dagger T_Y)_{\mathbb{Q}}$.

Ensuite, on en déduit que $f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}}$-cohérente. Comme il est en outre à support dans T_Y, la proposition 2.2.9 nous permet de conclure. □

Il résulte des lemmes 2.2.18 et 2.2.19 l'isomorphisme : $f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^!(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. Grâce à 2.2.6.1, on en déduit celui-ci $f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X}(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y} \circ f_0{}^!(\mathcal{E})$ fonctoriel en T_X. Il résulte alors du théorème 2.2.8, le suivant $f_0{}^! \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_X}(\mathcal{E}) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z_Y} \circ f_0{}^!(\mathcal{E})$ fonctoriel en Z_X.

Prouvons maintenant l'isomorphisme de droite de 2.2.17.2. Soient T_X un diviseur contenant Z_X et $T_Y := f_0^{-1}(T_X)$. Grâce à 2.1.9.1 et à l'isomorphisme de droite de 2.2.17.1, on obtient l'isomorphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_X} \circ f_{0+}(\mathcal{F}) \tilde{\to} f_{0+} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T_Y}(\mathcal{F})$. On termine la preuve en invoquant 2.2.8. □

2.2.20. — On se donne un système inductif, $(\mathcal{B}^{(m)}_{\mathfrak{X}})_{m\in\mathbb{N}}$, de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres commutatives plates sur $\mathcal{V}$, à sections noethériennes sur une base d'ouverts affines de $\mathfrak{X}$ et tel que pour tout m, $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ soit munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module. En notant, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}^{(m)}_{X_i}$ sa réduction modulo $\mathfrak{m}^{i+1}$, on suppose que $\mathcal{B}^{(m)}_{X_0}$ est $\mathcal{O}_{X_0}$-quasi-cohérent et que $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \tilde{\to} \varprojlim_i \mathcal{B}^{(m)}_{X_i}$.

On pose alors $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} := \varprojlim_i \mathcal{B}^{(m)}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_i}$. On suppose en outre que pour tout $m' \geq m$, les morphismes $\mathcal{B}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{B}^{(m')}_{\mathfrak{X}}$ sont $\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-linéaires puis que les morphismes d'anneaux $\widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \to \widetilde{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ sont plats à gauche et à droite. On notera $\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X}} := \varinjlim_m \mathcal{B}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ et $\widetilde{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mathfrak{X}} := \varinjlim_m \widetilde{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$. D'après [**Ber96a**, 3.6.1], ces hypothèses entraînent en particulier que le faisceau d'anneaux $\widetilde{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ est cohérent à gauche et à droite.

Proposition 2.2.21. — *Soient* $\mathcal{E} \in \underrightarrow{LD}^{\mathrm{b}}_{\mathbb{Q},\mathrm{qc}}(\widehat{\mathcal{D}}^{(\cdot)}_{\mathfrak{X}})$ *et* $Z \subset X$ *un sous-schéma fermé. Avec les notations de 2.2.20, on a alors un isomorphisme* $\widetilde{\mathcal{D}}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$*-linéaire, compatible à Frobenius et fonctoriel en* $\mathcal{E}$ *et en* Z *:*

$$\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}) \tilde{\to} \mathcal{B}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}{}^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z}(\mathcal{E}).$$

Démonstration. — Lorsque Z est un diviseur, cela résulte de 1.1.10. Le théorème 2.2.8 nous permet de conclure. □

3. $\mathcal{D}$-modules surcohérents

On note encore par $s \geq 1$ un entier, $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$ et $S := \mathrm{Spec}\,k$. De plus, on désigne les schémas formels par des lettres gothiques, la lettre droite associée signifiant leur fibre spécial. Enfin, on reprend les notations de 2 en ce qui concerne σ et F^*.

3.1. Stabilité de la surcohérence. — On se donne un morphisme $f_0 \colon Y \to X$ de k-schémas lisses, H_X un diviseur de X tel que $H_Y = f_0^{-1}(H_X)$ est un diviseur de Y. On suppose que X, Y se relèvent en des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$.

Définition 3.1.1. — Donnons-nous $\mathcal{E}$ un $(F\text{-})\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent (resp. un objet de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}})$). On dit que $\mathcal{E}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-*surcohérent* si pour tout morphisme lisse de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $g \colon \mathcal{P} \to \mathfrak{X}$, pour tout diviseur T de P, le faisceau $({}^{\dagger}T)(g^{*}\mathcal{E})$ est un $(F\text{-})\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}g^{-1}(H_X))_{\mathbb{Q}}$-module cohérent (resp. un objet de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}g^{-1}(H_X))_{\mathbb{Q}})$). Il est clair qu'un complexe est surcohérent si et seulement si ses espaces de cohomologie le sont.

On note $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}})$, la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}})$ des complexes surcohérents.

Remarque 3.1.2. —

1. Il existe des modules cohérents mais pas surcohérents. En effet, le faisceau $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent si et seulement si la dimension de X est nulle.
2. Il résulte de [**Cara**] que les F-isocristaux unités sur $X \setminus H_X$ surconvergents le long de H_X sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-surcohérents (en constatant de plus que le fait d'être un F-isocristal unité est stable par image inverse et extension du faisceau de l'anneau des opérateurs différentiels).
3. En général, on prouvera dans un article ultérieur ([**Carb**]) que les F-isocristaux sur $X \setminus H_X$ surconvergents le long de H_X sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérents. On remarque que même la $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérence de ces derniers reste conjectural. D'où l'intérêt des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-modules surcohérents.
4. Supposons ici que $\mathfrak{X}$ soit une courbe. D'après la caractérisation de l'holonomie sur les courbes ([**Car03**, 2.3.3]), un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent dont la cohérence est stable par foncteur cohomologique local est holonome. Il en découle qu'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module surcohérent est holonome.
5. On établira ([**Carb**]) que si les F-isocristaux sur $X \setminus H_X$ surconvergents le long de H_X sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-cohérents (ceci est conjecturé dans [**Ber02**]) alors ils sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-surcohérents.
6. Si l'holonomie est préservée par image inverse extraordinaire (conjecture [**Ber02**, 5.3.6.B]) alors les complexes holonomes sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-surcohérents.
7. Réciproquement, soit $\mathcal{E} \in (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}})$. On prouve grâce à [**Car03**, 2.2.9] et à l'analogue du théorème de Kashiwara, que si $\mathcal{E}$ est un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-complexe surcohérent (ou mieux : tel que pour tout point fermé x de X, en notant i_x un relèvement de l'immersion fermée induite, $i_x^{!}(\mathcal{E})$ reste cohérent (***)), alors il existe une stratification de $U = X \setminus H_X$ par des sous-schémas affines et lisses $U = \cup_{i=1}^{n} U_i$, telle que, pour $i = 1, \ldots n-1$, $\dim U_i < \dim U_{i+1}$ et telle que, en notant pour tout i, u_i l'immersion $U_i \hookrightarrow X$, les espaces de cohomologie de $u_i^{!}(\mathcal{E})$ soient $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}_i,\mathbb{Q}}$-cohérents, avec $\mathfrak{U}_i$ un $\mathcal{V}$-schéma formel affine et lisse relevant U_i.

   Si la conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D] (qui implique la conjecture [**Ber02**, 5.3.6.B]) est vérifiée, on en déduit que $\mathcal{E}$ est holonome.

   Ainsi, en admettant la conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D], un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent est holonome si et seulement s'il est F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent si et seulement s'il est F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-surcohérent si et seulement s'il vérifie la propriété (***). En particulier, la surcohérence serait stable par le foncteur dualité.
8. Tous les résultats de cette section seront valables sans structures de Frobenius.

A l'instar de la cohérence, on vérifie que la notion de surcohérence est locale en $\mathfrak{X}$. De même, on étend les propriétés standards des modules cohérents aux modules surcohérents :

Proposition 3.1.3. — *Soient $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_4 \to \mathcal{E}_5$ une suite exacte de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Si $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_5$ sont $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérents alors $\mathcal{E}_3$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérent.*

Proposition 3.1.4. — *Soit $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ un morphisme de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-modules surcohérents. Alors* $\ker\Phi$ *et* $\mathrm{Im}\Phi$ *sont $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérents.*

Passons à présent aux propriétés de stabilité de la surcohérence par les opérations cohomologiques.

Proposition 3.1.5. — *Pour tout sous-schéma fermé Z de X, pour tout F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-module surcohérent $\mathcal{E}$, $({}^\dagger Z)(\mathcal{E})$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E})$ sont $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-surcohérents.*

Démonstration. — Il existe des diviseurs $T_1, \ldots, T_n$ de X tels que $Z = \cap_{i=1,\ldots,n} T_i$. Le cas où Z est un diviseur résulte de 2.2.17.1. Grâce à 2.2.16, on termine la preuve en procédant par récurrence sur n. □

En reprenant la démonstration de l'analogue du théorème de Kashiwara (du à Berthelot [**Ber02**, 5.3.3]), on obtient par recollement l'énoncé suivant.

***Théorème 3.1.6* (Kashiwara).** — *On suppose que f_0 est une immersion fermée.*

1. *Pour tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ à support dans Y, tout $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{Y}}({}^\dagger H_Y)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{F}$ et tout entier $k \neq 0$, $\mathcal{H}^k f_{0+}(\mathcal{F}) = 0$ et $\mathcal{H}^k f_0^!(\mathcal{E}) = 0$.*
2. *Les foncteurs f_{0+} et $f_0^!$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents à support dans Y et celle des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{Y}}({}^\dagger H_Y)_{\mathbb{Q}}$-modules cohérents.*

Théorème 3.1.7. — *Pour tout $\mathcal{E} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger H_X)_{\mathbb{Q}})$, $f_0^!(\mathcal{E}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{Y}}({}^\dagger H_Y)_{\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. — Comme le théorème est local en $\mathfrak{Y}$ et en $\mathfrak{X}$, on peut supposer que f_0 se relève en un morphisme $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$. Puisque f se décompose en une immersion fermée suivi d'un morphisme lisse et puisque le cas où f est un morphisme lisse est immédiat, on se ramène au cas où f est une immersion fermée. Soient $g : \mathcal{P} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme lisse et Z un sous-schéma fermé de P. Il suffit de prouver que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^!(f^!(\mathcal{E})) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{P}}({}^\dagger g^{-1}(H_Y))_{\mathbb{Q}})$, ce qui est local en $\mathcal{P}$. On peut donc supposer que g se décompose en une immersion fermée $\mathcal{P} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathfrak{Y}}$ suivie de la projection $\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathfrak{Y}} \to \mathfrak{Y}$. En notant p la projection $\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}$ et i l'immersion fermée $\mathcal{P} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathfrak{X}}$, on obtient $f \circ g = p \circ i$. D'où l'isomorphisme : $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^!(f^!(\mathcal{E})) \tilde{\to} i^! \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z p^!(\mathcal{E})$. Comme $\mathcal{E}$ est surcohérent, $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z p^!(\mathcal{E}))$ est un complexe $\mathcal{D}^\dagger_{\widehat{\mathbb{A}}^n_{\mathfrak{X}}}({}^\dagger p^{-1}(H_X))_{\mathbb{Q}}$-cohérent (3.1.5) à support dans $Z \subset P$. Le théorème 3.1.6 nous permet de conclure. □

Afin de prouver la préservation de la surcohérence par l'image directe d'un morphisme propre (3.1.9), on aura besoin du théorème de changement de base par un morphisme lisse suivant.

Proposition 3.1.8. — *On suppose que f_0 se relève en un morphisme $f : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Soient $g : \mathcal{P} \to \mathfrak{X}$ un morphisme lisse et $\mathcal{F} \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{Y}}({}^\dagger H_Y)_{\mathbb{Q}})$. On note $p : \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{P} \to \mathfrak{Y}$ et $q : \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ les projections canoniques. On dispose alors d'un isomorphisme $g^! \circ f_+(\mathcal{F}) \tilde{\to} q_+ \circ p^!(\mathcal{F})$.*

Démonstration. — Comme le morphisme f se décompose en une immersion fermée (le graphe de $f\colon \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{Y} \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}$) suivie de la deuxième projection $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{V}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$, on se ramène à l'un de ces deux cas.

Le premier cas résulte de 2.2.17, de l'isomorphisme $f_{0,+}f_0^!(\mathcal{F})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Y_0}(\mathcal{F})$ et de 3.1.6.

Traitons à présent le deuxième cas. On a alors $f_+(\mathcal{F})\tilde{\to}\mathbb{R}f_*(\Omega^\bullet_{\mathcal{Y}/\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{Y}}\mathcal{F})[d_{Y/X}]$, où $\Omega^\bullet_{\mathcal{Y}/\mathfrak{X}}\otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{Y}}\mathcal{F}$ est le complexe de de Rham relatif de $\mathcal{F}$. On conclut alors grâce au théorème de changement de base de l'image directe topologique par un morphisme plat ([**Har66**, II.5.12]). ☐

Théorème 3.1.9. — *On suppose f_0 propre. Pour tout $\mathcal{F} \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_\mathcal{Y}({}^\dagger H_Y)_\mathbb{Q})$, $f_{0\,+}(\mathcal{F}) \in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger H_X)_\mathbb{Q})$.*

Démonstration. — Donnons-nous un morphisme lisse $g\colon \mathcal{P} \to \mathfrak{X}$ et Z un diviseur de P. Comme f_0 est propre, on sait déjà que $f_{0\,+}(\mathcal{F})$ est $\mathcal{D}^\dagger_\mathcal{Y}({}^\dagger H_Y)_\mathbb{Q}$-cohérent ([**Ber**]). Il suffit alors de vérifier que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^! f_{0\,+}(\mathcal{F}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger g_0^{-1}(H_X))_\mathbb{Q})$.

Commençons par traiter le cas où f_0 se relève en un morphisme $f:\mathcal{Y}\to\mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Grâce à 3.1.8 et avec ses notations, on a $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^! f_+(\mathcal{F})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z q_+\circ p^!(\mathcal{F})\tilde{\to}q_+\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{q^{-1}(Z)}p^!(\mathcal{F})$ (2.2.17). Or, il résulte de la stabilité par image inverse extraordinaire de la surcohérence (3.1.7) que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{q^{-1}(Z)}p^!(\mathcal{F}) \in D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}\times_\mathfrak{X}\mathcal{P}}({}^\dagger p^{-1}(H_Y))_\mathbb{Q})$. Comme q est propre, le faisceau $q_+\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{q^{-1}(Z)}p^!(\mathcal{F})$ est dans $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_\mathcal{P}({}^\dagger g^{-1}(H_X))_\mathbb{Q})$.

Traitons maintenant le cas général. Comme le morphisme f_0 se décompose en une immersion fermée (le graphe de $f_0 : Y \hookrightarrow Y\times X$) suivie de la deuxième projection $Y\times X \to X$ qui se prolonge en un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $\mathcal{Y}\times_\mathcal{S}\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$, on se ramène à supposer que f_0 est une immersion fermée. Or, le théorème étant local en $\mathfrak{X}$, on peut supposer que $\mathfrak{X}$ est affine. Le morphisme f_0 se relève alors en un morphisme $f:\mathcal{Y}\to\mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels affines et lisses. ☐

Remarque 3.1.10. — On rappelle (3.1.2.7) que si la conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D] est vérifiée, l'holonomie équivaut à la surcohérence. Grâce au théorème 3.1.9, on en déduit que la conjecture [**Ber02**, 5.3.6.D] (qui entraîne celle de la stabilité de l'holonomie par foncteur cohomologique locale) implique la conjecture concernant la stabilité de l'holonomie par image directe [**Ber02**, 5.3.6.A].

Remarque 3.1.11. — On suppose que f_0 est propre et que f_0 se relève en un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses f. Pour tous $\mathcal{F}\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_\mathcal{Y}({}^\dagger H_Y)_\mathbb{Q})$ et $\mathcal{E}\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger H_X)_\mathbb{Q})$, l'isomorphisme (résultant de [**Car03**, 1.2.6]) :

$$\mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_\mathcal{Y}({}^\dagger H_Y)_\mathbb{Q}}(\mathcal{F},\, f^!(\mathcal{E}))\tilde{\to}\mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_\mathfrak{X}({}^\dagger H_X)_\mathbb{Q}}(f_+(\mathcal{F}),\,\mathcal{E})$$

induit des morphismes d'adjonction compatibles à Frobenius $f_+\circ f^!(\mathcal{E})\to\mathcal{E}$, $\mathcal{F}\to f^!\circ f_+(\mathcal{F})$ (grâce à la stabilité de la surcohérence).

Si on suppose en outre que f_0 est une immersion fermée et que $\mathcal{E}$ est à support dans Y, alors, grâce à l'analogue du théorème de Kashiwara, on vérifie que ces morphismes d'adjonction sont des isomorphismes.

On aura besoin dans la section suivante du lemme suivant.

Lemme 3.1.12. — *Soient $i : \mathcal{Z}\hookrightarrow\mathfrak{X}$ une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses et $\mathcal{E}\in F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$. On dispose d'un isomorphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E})\tilde{\to}i_+\circ i^!(\mathcal{E})$ s'inscrivant dans le diagramme canonique*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[d, equal] \\
i_+\circ i^!(\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{adj}"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd},$$

le morphisme du bas étant le morphisme d'adjonction de 3.1.11.

Démonstration. — Par fonctorialité, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} i_+ \circ i^! \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}) \arrow[r, "adj"] \arrow[d] & \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}). \arrow[d] \\ i_+ \circ i^!(\mathcal{E}) \arrow[r, "adj"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Grâce à 3.1.11, la flèche du haut est un isomorphisme. De plus, il résulte de la fonctorialité en Z de la commutation de la cohomologie locale avec l'image inverse extraordinaire (2.2.17.1), que le morphisme de gauche est un isomorphisme. □

3.2. Catégorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents au-dessus d'un k-schéma séparé et de type fini. —

Notations 3.2.1. — Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, T et Z deux sous-schémas fermés de X. On note alors $(F\text{-})\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$ la catégorie des $(F\text{-})\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules surcohérents $\mathcal{E}$ à support dans Z et vérifiant $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E}) = 0$. On remarque que si T est un diviseur, la condition $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E}) = 0$ équivaut à dire que la structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module se prolonge en une structure de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}({}^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-module.

De même, on note $(F\text{-})\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$ la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ des complexes $\mathcal{E}$ vérifiant $({}^\dagger Z)(\mathcal{E}) = 0$ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E}) = 0$. Comme les foncteurs $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T$ et $({}^\dagger Z)$ ne dépendent que de l'espace sous-jacent du sous-schéma fermé respectif, on supposera toujours que Z et T sont réduits.

Remarque 3.2.2. — On garde les notations de 3.2.1.

1. Tous les énoncés de cette section seront valables sans structure de Frobenius.
2. Si T est un diviseur et $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$, alors pour tout entier r, $\mathcal{H}^r(\mathcal{E}) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$. Par contre, lorsque T est quelconque, on vérifie grâce à la remarque 2.2.11 que ce dernier résultat est faux. Comme nous travaillons avec des complexes, l'étude de la catégorie $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$ est surtout intéressante lorsque T est un diviseur de X. Mais, avec la remarque 3.2.10, supposer que T est un diviseur ne nuit pas à la généralité quant à la construction de la catégorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents au-dessus d'un k-schéma séparé de type fini.
3. Soit $T' \supset T$ un sous-schéma fermé de X. On a l'inclusion : $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T',Z} \subset F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$. De plus, si $Z' \supset Z$ est un sous-schéma fermé de X, alors $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z} \subset F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z'}$.
4. Si D est un sous-schéma fermé de X, $({}^\dagger D)$ induit un foncteur $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z} \to F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T\cup D,Z}$ tandis que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_D$ donne un foncteur $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z} \to F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z\cap D}$.

Avant d'établir que la catégorie $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z}$ (resp. $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z}$ lorsque T est un diviseur) ne dépend que du sous-schéma $U := Z \setminus T$, nous aurons besoin des deux propositions suivantes.

Proposition 3.2.3. — *Soient Z un k-schéma lisse, $g : \mathcal{Y}_2 \to \mathcal{Y}_1$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $i : Z \hookrightarrow \mathcal{Y}_1$, $i' : Z \hookrightarrow \mathcal{Y}_2$ deux immersions fermées telles que $g \circ i' = i$. On se donne aussi $\mathcal{E}_1$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}_1,\mathbb{Q}}$-module surcohérent à support dans Z et $\mathcal{E}_2$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{Y}_2,\mathbb{Q}}$-module surcohérent à support dans Z. Alors,*

1. *Pour tout $k \neq 0$, $\mathcal{H}^k(g_+(\mathcal{E}_2)) = 0$ et $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^!(\mathcal{E}_1)) = 0$;*
2. *On dispose d'isomorphismes canoniques $g_+\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^!(\mathcal{E}_1) \tilde{\to} \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2 \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^! g_+(\mathcal{E}_2)$.*

Démonstration. — La première assertion est locale et l'on peut supposer que Z se relève en un schéma affine et lisse. L'analogue du théorème de Kashiwara nous permet alors de conclure celle-ci.

Par adjonction, on construit un morphisme $g_+\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^!(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{E}_1$. Le fait que celui-ci soit un isomorphisme est local en $\mathcal{Y}_1$ et résulte alors de 3.1.12 et à 3.1.11. Pour le deuxième isomorphisme, on vérifie d'abord de manière analogue que le morphisme induit par adjonction $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}_2) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z g^! g_+(\mathcal{E}_2)$ est un isomorphisme. L'isomorphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}_2)\tilde{\to}\mathcal{E}_2$ nous permet alors de conclure. □

Proposition 3.2.4. — *Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, Z, Z', T et T' des sous-schémas fermés de X tels que $Z \setminus T = Z' \setminus T'$. On a alors les égalités $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T,Z} = F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X},T',Z'}$ et $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z} = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T',Z'}$. En particulier, en notant $\overline{U}$ l'adhérence schématique de U dans X, $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,Z} = F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X},T,\overline{U}}$.*

Démonstration. — La seconde égalité se démontrant de façon identique, bornons-nous à établir la première. Premier cas : $Z' = Z$. Soit $\mathcal{E}$ un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent à support dans Z. Comme $Z \cap T = Z \cap T'$ et que le morphisme canonique $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_Z(\mathcal{E}) \to \mathcal{E}$ est un isomorphisme, on a $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E})\tilde{\leftarrow}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T\cap Z}(\mathcal{E}) = \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'\cap Z}(\mathcal{E})\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'}(\mathcal{E})$.

Deuxième cas : $T' = T$. Soit $\mathcal{E}$ un $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module surcohérent et vérifiant $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T(\mathcal{E}) = 0$. Grâce à 2.2.9, comme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_T((^\dagger Z)\mathcal{E}) = 0$, on vérifie que $(^\dagger Z)\mathcal{E} = 0$ si et seulement si $((^\dagger Z)\mathcal{E})_{|X\setminus T} = 0$, de même en remplaçant Z par Z'. Or,
$[(^\dagger Z)(\mathcal{E})]|_{X\setminus T}\tilde{\to}(^\dagger Z \setminus T)(\mathcal{E}|_{X\setminus T}) = (^\dagger Z' \setminus T)(\mathcal{E}|_{X\setminus T})\tilde{\to}[(^\dagger Z')(\mathcal{E})]|_{X\setminus T}$. Donc, $(^\dagger Z)(\mathcal{E}) = 0$ si et seulement si $(^\dagger Z')(\mathcal{E}) = 0$.

Le cas général se déduit aussitôt des deux premiers cas. □

Remarque 3.2.5. — Avec les notations de 3.2.4, supposons que T soit un diviseur de X. Il est moins clair que la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}(^\dagger T)_{\mathbb{Q}}$-modules surcohérents à support dans Z vérifie la propriété d'indépendance de 3.2.4. Mais, cela reste conjectural.

Théorème 3.2.6. — *Soient $f : \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ un morphisme propre et lisse de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses et, pour $i = 1,2$, T_i un diviseur de X_i et Z_i un sous-schéma fermé de X_i. On suppose de plus que $Z_1 \setminus T_1 = Z_2 \setminus T_2$ et on se donne $\mathcal{E}_1 \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ et $\mathcal{E}_2 \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$. Alors,*

1. *Pour tout $k \neq 0$, $\mathcal{H}^k(f_+)(\mathcal{E}_2) = 0$ et $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathcal{E}_1)) = 0$;*
2. *Les morphismes canoniques $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}_2)$ sont des isomorphismes.*

Les foncteurs f_+ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!$ induisent donc une équivalence entre les catégories $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$ et $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$.

Démonstration. — Notons $\mathcal{Y}_1 = \mathfrak{X}_1 \setminus T_1$, $\mathcal{Y}_2 = \mathfrak{X}_2 \setminus T_2$, $g : \mathcal{Y}_2 \to \mathcal{Y}_1$ le morphisme induit par f et $U = Z_1 \setminus T_1$. En premier lieu, grâce à 3.2.4, on peut supposer que Z_1 (resp. Z_2) est l'adhérence schématique de U dans X_1 (resp. X_2).

Étape 0 *Prouvons que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathcal{E}_1) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$, que $f_+(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ et que l'on peut supposer $T_2 = f^{-1}(T_1)$ (qui est un diviseur de X_2 puisque f est lisse).*

Grâce à 3.2.4 et à 2.2.17 cela résulte de la vérification de l'égalité : $U = Z_2\setminus f^{-1}(T_1)$. Démontrons donc celle-ci. Comme f est propre, on vérifie que l'immersion $U \hookrightarrow X_2\setminus f^{-1}(T_1)$ est fermée. Comme Z_2 est l'adhérence de U dans X_2, on en déduit que $U = Z_2 \setminus f^{-1}(T_1)$.

Étape 1 *Supposons dans un premier temps que U est lisse.*

On a $f_+(\mathcal{E}_2)_{|\mathcal{Y}_1}\tilde{\to}g_+(\mathcal{E}_{2|\mathcal{Y}_2})$ et $(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathcal{E}_1))_{|\mathcal{Y}_2}\tilde{\to}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2\cap Y_2} \circ g^!(\mathcal{E}_{1|\mathcal{Y}_1})$. Il résulte de [**Ber96a**, 4.3.12] et de 3.2.3 les égalités 3.2.6.1.

De plus, par adjonction, on a $\mathcal{E}_2\tilde{\leftarrow}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2}\mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}_2)$. Comme celui-ci est un isomorphisme au dessus de $\mathcal{Y}_2$ (3.2.3), celui-ci est un isomorphisme ([**Ber96a**, 4.3.12]). Avec la même argumentation, si $\mathcal{E}_1$ est un objet de $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$, on établit que le morphisme canonique :

$f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^! \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1$ est un isomorphisme. On a donc prouvé le théorème dans le cas où U est lisse.

Étape 2 *Prouvons maintenant la proposition dans le cas général. Pour cela, nous procédons à une récurrence sur la dimension de U.*

Si la dimension de U est nulle alors U est affine et étale (sur k) et le théorème immédiat. Supposons donc $\dim U \geq 1$ et le théorème validé lorsque la dimension de U est strictement inférieure.

Or, il existe un diviseur H_1 de X_1 tel que

1. $U \setminus H_1$ est lisse ;
2. $\dim U \cap H_1 < \dim U$.

Si on note $H_2 := f^{-1}(H_1)$ alors $U \cap H_1 = U \cap H_2$ et $U \setminus H_1 = U \setminus H_2$.

Étape 2 a) *Vérifions que pour tout entier $r \neq 0$, $\mathcal{H}^r f_+(\mathcal{E}_2) = 0$.*

Le triangle de localisation en H_2 de $\mathcal{E}_2$ induit la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{H}^{\dagger,0}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{E}_2 \to ({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \to 0. \tag{3.2.6.1}$$

En notant $\mathcal{F}_2$ le noyau de l'épimorphisme $({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2)$, on obtient ainsi la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}_2 \to ({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \to 0.$$

En appliquant le foncteur f_+ à celle-ci, il en dérive une suite exacte longue. Or, $({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2 \cup H_2, Z_2}$ et $\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2 \cap H_2}$. D'après l'étape 1 et par hypothèse de récurrence, cette suite exacte longue donne, pour tout entier $r \notin \{0,1\}$, $\mathcal{H}^r(f_+)(\mathcal{F}_2) = 0$. En outre, on vérifie que $\mathcal{H}^1(f_+)(\mathcal{F}_2) = 0$ si et seulement si le morphisme $s_1 : \mathcal{H}^0(f_+)(({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2)) \to \mathcal{H}^0(f_+)(\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2))$ est surjectif. Avant de prouver ce dernier fait, commençons par le lemme suivant :

Lemme 3.2.7. — *Le morphisme $s_2 := \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!)(s_1)$ est surjectif.*

Démonstration. — Comme $({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2 \cup H_2, Z_2}$ d'après l'étape 1, le morphisme canonique $({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!) \circ \mathcal{H}^0(f_+)(({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2))$ est un isomorphisme.

Comme $\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2, T_2, Z_2 \cap H_2}$, par hypothèse de récurrence, le morphisme composé canonique $\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2 \cap H_2} \circ f^!) \circ \mathcal{H}^0(f_+)(\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!) \circ \mathcal{H}^0(f_+)(\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2))$ est un isomorphisme. Comme le morphisme $({}^\dagger H_2)(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2)$ est surjectif, on en déduit qu'il en est de même de s_2. □

Déduisons-en maintenant que le morphisme s_1 est surjectif. Notons $\mathcal{F}_1$ l'image de s_1 et i_1 l'injection canonique $\mathcal{F}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}^0(f_+)(\mathcal{H}^{\dagger,1}_{H_2}(\mathcal{E}_2))$. Or, d'après 3.1.4 et 3.1.9, $\mathcal{F}_1$ est $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1, \mathbb{Q}}$-surcohérent. Il est en outre muni d'une structure canonique de $F\text{-}\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}}$-module et est à support dans $Z_1 \cap H_1$, i.e., $\mathcal{F}_1 \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1 \cap H_1}$. Or, sur cette catégorie, les deux foncteurs $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2 \cap H_2} \circ f^!)$ et $\mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!)$ sont canoniquement isomorphes. Par hypothèse de récurrence, i_1 induit alors l'injection $i_2 := \mathcal{H}^0(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!)(i_1)$. De plus, comme s_2 est surjectif, i_2 l'est aussi. Le morphisme i_2 est donc un isomorphisme et par hypothèse de récurrence, il en est alors de même de i_1. On a donc prouvé que s_1 est surjectif ce qui, d'après ce qu'on a vu, est équivalent à $\mathcal{H}^1(f_+)(\mathcal{F}_2) = 0$. Finalement, on a vérifié que, pour tout $r \neq 0$, $\mathcal{H}^r(f_+)(\mathcal{F}_2) = 0$.

Or, il résulte de 3.2.6.1 la suite exacte $0 \to \mathcal{H}^{\dagger,0}_{H_2}(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{F}_2 \to 0$. En appliquant le foncteur f_+ à cette dernière, on obtient suite exacte longue. Il résulte alors des propriétés : pour tout $r \neq 0$, $\mathcal{H}^r(f_+)(\mathcal{F}_2) = 0$ et $\mathcal{H}^r(f_+)(\mathcal{H}^{\dagger,0}_{H_2}(\mathcal{E}_2)) = 0$, que pour tout $r \neq 0$, $\mathcal{H}^r(f_+)(\mathcal{E}_2) = 0$.

Étape 2b *De façon analogue, on établit que pour tout $r \neq 0$, pour tout objet $\mathcal{E}_1$ de $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1, T_1, Z_1}$, $\mathcal{H}^r(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!)(\mathcal{E}_1) = 0$. On omettra alors d'écrire $\mathcal{H}^0$.*

Étape 2c *On prouve 3.2.6.2.* Par hypothèse de récurrence, on vérifie que le morphisme canonique $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{H_1}(\mathcal{E}_1)) \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{H_1}(\mathcal{E}_1)$ est un isomorphisme. De plus, on déduit de l'étape 1 que le morphisme $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!((^\dagger H_1)(\mathcal{E}_1)) \to (^\dagger H_1)(\mathcal{E}_1)$ est un isomorphisme. Il en résulte, grâce au triangle de localisation de $\mathcal{E}_1$ en H_1, que le morphisme $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{E}_1$ est un isomorphisme. De la même manière, si $\mathcal{E}_2 \in F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$, on vérifie que le morphisme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}_2) \to \mathcal{E}_2$ est un isomorphisme. □

Théorème 3.2.8. — *Soient $f : \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, T_1 et Z_1 deux sous-schémas fermés de X_1, T_2 et Z_2 deux sous-schémas fermés de X_2. De plus, on suppose que $Z_1 \setminus T_1 = Z_2 \setminus T_2$ et on se donne $\mathcal{E}_1 \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ et $\mathcal{E}_2 \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$.*

Alors, les morphismes canoniques $f_+ \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!(\mathcal{E}_1) \to \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2 \to \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^! \circ f_+(\mathcal{E}_2)$ sont des isomorphismes. Les foncteurs f_+ et $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ f^!$ induisent donc une équivalence entre les catégories $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$ et $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$.

Démonstration. — On procède de manière analogue aux étapes 0, 1, 2*c* de la preuve du théorème 3.2.6. □

3.2.9. — Soient $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ deux $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses, et, pour $i = 1,2$, Z_i un sous-schéma fermé de X_i et T_i un diviseur de X_i. On note $U_1 = Z_1 \setminus T_1$ et $U_2 = Z_2 \setminus T_2$. On suppose qu'il existe un morphisme quelconque $f : U_2 \to U_1$.

On note $\mathfrak{X}_3 := \mathfrak{X}_2 \times_{\mathcal{V}} \mathfrak{X}_1$, $q : \mathfrak{X}_3 \to \mathfrak{X}_2$ et $p : \mathfrak{X}_3 \to \mathfrak{X}_1$ les projections canoniques (qui sont des morphismes propres), $T_3 = p^{-1}(T_1) \cup q^{-1}(T_2)$, Z_3 l'adhérence schématique de U_2 dans $X_2 \times X_1$ (on a les immersions $U_2 \hookrightarrow U_2 \times U_1 \hookrightarrow X_2 \times X_1$).

Or, les deux catégories $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$ et $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_3,T_3,Z_3}$ sont égales. En effet, comme on a l'égalité $Z_3 \setminus T_3 = U_2$ (car l'immersion $U_2 \hookrightarrow (X_2 \times X_1) \setminus T_3$ est fermée), cela résulte du théorème 3.2.8.

On pourra donc toujours se ramener au cas où le morphisme f se prolonge en un morphisme propre $p : \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ vérifiant l'inclusion $p^{-1}(T_1) \subset T_2$. Mais, contrairement à l'étape 0 de 3.2.6, on ne peut pas toujours supposer que $p^{-1}(T_1) = T_2$ (sauf si f est propre) car l'immersion $U_2 \hookrightarrow X_2 \setminus p^{-1}(T_1)$ n'est pas en générale fermée (sauf si f est propre). Enfin, grâce à 3.2.4, il ne coûte rien de supposer que, pour $i = 1,2$, Z_i est l'adhérence schématique de U_i dans X_i. Cela entraîne aussitôt l'inclusion $Z_2 \subset p^{-1}(Z_1)$.

En particulier, on en déduit que la catégorie $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ est indépendante de $\mathfrak{X}_1$, T_1 et Z_1 et ne dépend que de U_1. On peut la voir comme l'analogue p-adique de la catégorie des $\mathcal{D}_{U_1}$-modules holonomes. Si aucune confusion n'est à craindre, on pourra donc la noter $F\text{-}\mathfrak{M}_{U_1}$ et nommer ses objets *$\mathcal{D}_{U_1}$-modules arithmétiques surcohérents.*

De la même façon, (on remarque que le fait que T_1 et T_2 soient des diviseurs est ici inutile), la catégorie $F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ est indépendante de $\mathfrak{X}_1$, T_1 et Z_1 et ne dépend que de U_1. Elle correspond à l'analogue p-adique de la catégorie des complexes à cohomologie bornée et holonome, $D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_{U_1})$. On pourra ainsi la noter plus simplement $F\text{-}\mathfrak{C}_{U_1}$.

Le foncteur p_+ induit un foncteur $F\text{-}\mathfrak{C}_{U_2} \to F\text{-}\mathfrak{C}_{U_1}$. Celui-ci ne dépend que du morphisme f et correspond à l'analogue p-adique du foncteur $f_+ : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_{U_2}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_{U_1})$.

De même, on obtient un foncteur $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ (^\dagger T_2) \circ p^! : F\text{-}\mathfrak{C}_{U_1} \to F\text{-}\mathfrak{C}_{U_2}$. Ce foncteur ne dépend que de f et peut être vu comme l'analogue p-adique du foncteur $f^! : D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_{U_1}) \to D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}_{U_2})$.

Avec cette analogie, la surcohérence des $\mathcal{D}$-module arithmétiques est donc préservée par l'image directe et l'image inverse extraordinaire d'un morphisme quelconque. Par contre, on ne sait pas encore que la surcohérence est stable par foncteur dual. C'est précisément pour cette raison que l'on s'intéressera (3.3.1) à la catégorie déduite de celle des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents par application du foncteur dual $\mathcal{D}$-linéaire.

Remarque 3.2.10. — Soit U un k-schéma séparé de type fini. Lorsqu'il n'existe pas de $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse $\mathfrak{X}$, de sous-schéma fermé Z de X et de diviseur de T de X tel que $U = Z \setminus T$, on peut définir la catégorie $F\text{-}\mathfrak{M}_U$ par recollement : on choisit un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de U tel que, pour tout $i \in I$, il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et lisse $\mathfrak{X}_i$, un sous-schéma fermé Z_i de X_i et un diviseur de T_i de X_i tel que $U_i = Z_i \setminus T_i$. On note $p_{ij} : \mathfrak{X}_i \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_i$ et $q_{ij} : \mathfrak{X}_i \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}_j \to \mathfrak{X}_j$ les projections canoniques, Z_{ij} l'adhérence de $U_i \cap U_j$ dans $X_i \times X_j$ et $T_{ij} = p_{ij}^{-1}(T_i) \cup q_{ij}^{-1}(T_j)$. Un objet de $F\text{-}\mathfrak{M}_U$ est alors constitué par la donnée pour tout i d'un objet de $F\text{-}\mathfrak{M}_{\mathfrak{X}_i, T_i, Z_i}$, $\mathcal{E}_i$, et, pour tous i, j, d'un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_i \times_{\mathcal{S}} \mathfrak{X}_j, \mathbb{Q}}$-linéaire $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_{ij}} \circ ({}^\dagger T_{ij}) \circ p^!_{ij}(\mathcal{E}_i) \tilde{\to} \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_{ij}} \circ ({}^\dagger T_{ij}) \circ q^!_{ij}(\mathcal{E}_j)$, ces isomorphismes vérifiant la condition de cocycle habituelle.

On nomme $F\text{-}\mathfrak{M}_U$ la catégorie des $\mathcal{D}_U$-modules arithmétiques surcohérents.

De même, si $f : U_2 \to U_1$ est un morphisme de k-schémas séparés et de type fini, on construit de manière analogue à 3.2.9 et par recollement les foncteurs $f^!$ et f_+ entre la catégorie des $\mathcal{D}_{U_1}$-modules arithmétiques surcohérents et celle des $\mathcal{D}_{U_2}$-modules arithmétiques surcohérents.

3.3. Formules cohomologiques des fonctions L. — Soient $q = p^s$ une puissance d'un nombre premier. On suppose dans cette section que $k = \mathbb{F}_q$ (si X est un k-schéma alors $X^{(s)} = X$).

On sait déjà ([**Car03**, 3.4.1]) que les fonctions L associées aux complexes de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques holonomes au dessus d'une courbe vérifient une formule cohomologique appelée $L = P$. Or, on rappelle que la stratégie de Grothendieck pour prouver celle de la fonction Zéta de Weil sur un k-schéma séparé de type fini X se fait par récurrence sur la dimension de X par le truchement d'une catégorie de coefficients stable par opérations cohomologiques, celle des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux lisses, avec l un nombre premier choisi différent de p.

La stabilité de la surcohérence par image directe et image inverse extraordinaire, nous permet alors de calquer [**Car02**, 6] (qui reprend la stratégie de Grothendieck) afin de prouver que les complexes duaux de complexes surcohérents vérifient l'égalité $L = P$.

3.3.1. — Reprenons les notations de 3.2.9. On rappelle que grâce à la dimension cohomologique finie du faisceau d'anneaux $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}({}^\dagger T_1)$ ([**Huy53**]), la catégorie des complexes parfaits de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}({}^\dagger T_1)$-modules est égale à celle des complexes de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}({}^\dagger T_1)$-modules à cohomologie bornée et cohérente. Le foncteur dual $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}({}^\dagger T_1)$-linéaire (voir [**Vir00**, I.3.2]) se comporte donc bien sur cette dernière et sera noté $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1}$. On désignera par $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ la sous-catégorie pleine de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1}({}^\dagger T_1)_{\mathbb{Q}})$ des F-complexes $\mathcal{E}_1$ tels que $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1}(\mathcal{E}_1) \in F\text{-}\mathfrak{C}_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$. Il est immédiat que celle-ci est une sous-catégorie pleine de celle des complexes pseudo-holonomes ([**Car03**, 2.2.1]). On peut donc définir leur fonction L et P ([**Car03**, 3.1]) définies ci-après. La version "dualisée" du théorème d'indépendance en $\mathfrak{X}_1$, Z_1 et T_1 (3.2.8) est valable, i.e., la catégorie $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ ne dépend que de U_1 (3.2.9) et pourra ainsi être notée $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{U_1}$. Cependant, on prendra garde au fait que si $\mathcal{E}_1$ est un objet de $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$, il n'est pas évident que ses espaces de cohomologie restent des objets de $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$. Par exemple, si $\mathcal{M}_1$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-complexe surcohérent, je ne sais pas si les complexes $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1}\mathcal{H}^r(\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1}(\mathcal{M}_1))$ sont $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}_1,\mathbb{Q}}$-surcohérents. Bien entendu, la conjecture sur l'identité entre l'holonomie et la surcohérence entraîne ce dernier fait.

On note $p_{T_1,T_2,!}$ le foncteur $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1} \circ p_+ \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}_2,T_2}$. Celui-ci induit un foncteur $p_{T_1,T_2,!} : F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2} \to F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$ qui est l'analogue p-adique de $f_!$ et que l'on pourra noter ainsi.

De plus, on note $p^+_{T_2,T_1}$ le foncteur $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_2,T_2} \circ p^! \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1}$. Enfin, on dispose du foncteur $\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_2,T_2} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z_2} \circ ({}^\dagger T_2) \circ p^! \circ \mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1} : F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1} \to F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$ qui est l'analogue p-adique du foncteur f^+ et que l'on pourra écrire ainsi.

Donnons un exemple : supposons que $X_2 = X_1$ et $Z_2 = Z_1$. Comme $T_1 \subset T_2$, f est une immersion ouverte. Si $\mathcal{E}_2 \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_2,Z_1}$, alors $f_!(\mathcal{E}_2) = \mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1}\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_2}(\mathcal{E}_2)$. De plus, si $\mathcal{E}_1 \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}_1,T_1,Z_1}$, alors $f^+(\mathcal{E}_1) = \mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_2}({}^\dagger T_2)\mathbb{D}_{\mathfrak{X}_1,T_1}(\mathcal{E}_1) \tilde{\to} ({}^\dagger T_2)(\mathcal{E}_1)$.

Si T_1 ou T_2 sont vides, on omettra de les écrire dans les expressions $p_{T_1,T_2,!}$ et $p^+_{T_2,T_1}$.

Notations 3.3.2. — Dans tout la suite, on désigne par $p\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{S}$ un morphisme propre et lisse, Z un sous-schéma fermé de X, T un diviseur de X, $\mathcal{Y}$ l'ouvert $\mathfrak{X} \setminus T$ et $U = Z \setminus T$. Si S est un sous-ensemble de X, on note S^0 le sous-ensemble des points fermés de S. Si y est un point fermé de Y, on notera $i_y : \operatorname{Spf} \mathcal{V}(y) \hookrightarrow \mathfrak{X}$ un relèvement de l'immersion fermée $\operatorname{Spec} k(y) \hookrightarrow X$ induite par y et $p_y : \operatorname{Spf} \mathcal{V}(y) \to \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ le morphisme structural.

Définition 3.3.3. — Soient $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T,Z}$ et S est un sous-ensemble de points fermés de X. On définit la fonction L associée à $\mathcal{E}$ au dessus de S en posant :

$$L(S,\mathcal{E},t) = \prod_{y \in S^0} \prod_{j \in \mathbb{Z}} \det{}_K \left(1 - tF_{|\mathcal{H}^j(p_{y+} i^+_{y,T}(\mathcal{E}))}\right)^{(-1)^{j+1}},$$

où $F_{|\mathcal{H}^j(p_{y+} i^+_{y,T}(\mathcal{E}))}$ désigne l'action de Frobenius sur $\mathcal{H}^j(p_{y+} i^+_{y,T}(\mathcal{E}))$, celle-ci résultant des théorèmes de commutations de Frobenius aux opérateurs cohomologiques.

Définition 3.3.4. — Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T,Z}$. On définit la fonction cohomologique P associée à $\mathcal{E}$ en posant

$$P(U,\mathcal{E},t) := \prod_j \det{}_K \left(1 - tF_{|\mathcal{H}^j(p_{T,!}\mathcal{E})}\right)^{(-1)^{j+1}},$$

où $F_{|\mathcal{H}^j(p_{T,!}\mathcal{E})}$ indique l'action de Frobenius sur $\mathcal{H}^j(p_{T,!}\mathcal{E})$.

Remarque 3.3.5. — Soient y un point fermé de Y et E_y un F-isocristal convergent sur $\operatorname{Spec} k(y)$. L'égalité $L = P$ étant vérifiée pour les F-isocristaux convergents ([**ÉLS93**]), on obtient :

$$\det{}_K \left(1 - t^{\deg y} F^{\deg y}_{|E_y}\right)^{1/\deg y} = \det{}_K \left(1 - tF_{|p_{y,!}E_y}\right) = \det{}_K \left(1 - tF_{|p_{y,+}E_y}\right).$$

Cette remarque nous a donc permis de modifier les conventions de [**Car02**, 4.3.3] quant à la définition de la fonction L, le but étant d'alléger les notations.

De plus, on remarque que si $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T,Z}$, en oubliant que $\mathcal{E}$ est à support dans Z, on a $P(U,\mathcal{E},t) = P(Y,\mathcal{E},t)$ et $L(U,\mathcal{E},t) = L(Y,\mathcal{E},t)$.

La vérification du lemme suivant nous permet d'obtenir le théorème ci-après.

Lemme 3.3.6. — *Soient $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses, T et T' des diviseurs de X et X', Z et Z' des sous-schémas fermés de X et X'. On suppose $Z \setminus T = Z' \setminus T'$ et on note $U = Z \setminus T$. Si $\mathcal{E}' \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X}',T',Z'}$ et $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T,Z}$ alors :*

$$L(U,\mathcal{E}',t) = L(U,f_{T,T',!}(\mathcal{E}'),t) \text{ et } P(U,\mathcal{E}',t) = P(U,f_{T,T',!}(\mathcal{E}'),t)$$

$$L(U,\mathcal{E},t) = L(U,\mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z'} f^! \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}),t) \text{ et } P(U,\mathcal{E},t) = P(U,\mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z'} f^! \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}),t)$$

Démonstration. — Tout d'abord, on vérifie les égalités $P(U,\mathcal{E}',t) = P(U,f_{T,T',!}(\mathcal{E}'),t)$ et $L(U,\mathcal{E},t) = L(U,\mathbb{D}_{\mathfrak{X}',T'}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{Z'} f^! \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}),t)$: : pour la première, on utilise le fait que la composition des images inverses extraordinaires commutent à l'action de Frobenius (1.2.2), ainsi que l'isomorphisme de bidualité ([**Vir00**, II.3.5]) ; tandis que pour la deuxième on se sert de plus de la compatibilité à Frobenius de la composition des images directes (1.2.15) et de l'analogue du théorème de Kaschiwara. Les deux autres s'en déduisent grâce à 3.2.6 et au théorème de bidualité ([**Vir00**, II.3.5]). ☐

Théorème 3.3.7. — *Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_U$. Les fonctions $L(U, \mathcal{E}, t)$ et $P(U, \mathcal{E}, t)$ sont bien définies, i.e., elles ne dépendent ni du choix du triplet ($\mathfrak{X}$, Z, T) ni de celui de l'objet de $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T,Z}$ associé à $\mathcal{E}$. La vérification de l'égalité $L(U, \mathcal{E}, t) = P(U, \mathcal{E}, t)$ dépend donc exclusivement de U.*

Théorème 3.3.8. — *Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_U$. Alors, $L(U,\mathcal{E},t) = P(U,\mathcal{E},t)$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur la dimension de U.

Dans un premier temps, supposons que $\dim U = 0$. Alors U se relève en un schéma formel fini et étale sur $\mathcal{V}$, $\mathfrak{U}$. D'après 3.3.7, on peut donc supposer que $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}$ et $T = \emptyset$. L'égalité $L(U,\mathcal{E},t) = P(U,\mathcal{E},t)$ est alors immédiate.

Dans un second temps, supposons que $\dim U \geq 1$ et que le théorème est validé pour $\dim U$ strictement inférieur.

Or, il existe un diviseur $T' \supset T$ tel que

1. il existe un morphisme lisse $g\colon U' := U \setminus T' \to \mathbb{A}^1_k$,
2. $\dim U \cap T' < \dim U$.

En appliquant $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}$ au triangle de localisation en T' de $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E})$, on obtient :

$$\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}({}^\dagger T')(\mathcal{E}) \to \mathcal{E} \to \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'}\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \to \mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}({}^\dagger T')(\mathcal{E})[1]. \tag{3.3.8.1}$$

Comme $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{T'}\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}(\mathcal{E}) \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T,Z\cap T'}$, par hypothèse de récurrence, celui-ci vérifie l'égalité $L = P$. De plus, en notant $U' = U \setminus T'$ et $\mathcal{E}' = ({}^\dagger T')(\mathcal{E}) \in F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{U'}$, on vérifie les égalités

$$L(U',\mathcal{E}',t) = L(U,\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\circ\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}'),t), \quad P(U',\mathcal{E}',t) = P(U,\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T}\circ\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}'),t).$$

Il résulte alors du triangle de localisation 3.3.8.1 que $\mathcal{E}$ vérifie l'égalité $L = P$ si et seulement si $\mathcal{E}'$ la vérifie. Nous allons à présent prouver cette dernière assertion.

Notons $\mathcal{P}$ le complété formel de $\mathbb{P}^1_{\mathcal{V}}$, H le diviseur complémentaire de $\mathbb{A}^1_k$ dans $\mathbb{P}^1_k$. D'après 3.2.9 et 3.3.7, on peut supposer que g se prolonge en un morphisme $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}$. Pour tout point fermé a de $\mathbb{A}^1_k$, on notera X_a la fibre de a par le morphisme $X \to \mathbb{P}^1_k$, $Z_a = Z \cap X_a$, $U'_a = U' \cap X_a$ et $i_a : \operatorname{Spf}\mathcal{V}(a) \hookrightarrow \mathcal{P}$ un relèvement de l'immersion fermée induite par a et $q_a : \operatorname{Spf}\mathcal{V}(a) \to \operatorname{Spf}\mathcal{V}$ le morphisme structural.

D'après [**Car03**, 3.4.1], l'égalité $L = P$ est validée sur les courbes pour les complexes holonomes. Comme un complexe surcohérent sur une courbe est holonome (3.1.24), on obtient alors $P(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t) = L(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t)$. La compatibilité à Frobenius de la composition des images directes induit l'égalité : $P(U',\mathcal{E}',t) = P(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t)$. D'où celle-ci : $P(U',\mathcal{E}',t) = L(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t)$. Il reste donc à vérifier que $L(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t) = L(U',\mathcal{E}',t)$.

Pour cela, on aura besoin du lemme.

Lemme 3.3.9. — *En notant ρ_a l'immersion fermée $U'_a \hookrightarrow U'$ et $\rho_a^+(\mathcal{E}')$ l'objet $\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}\circ\mathbb{R}\underline{\Gamma}^\dagger_{X_a}\circ\mathbb{D}_{\mathfrak{X},T'}(\mathcal{E}')$ de $F\text{-}\mathfrak{C}^\vee_{\mathfrak{X},T',Z_a}$, on a un isomorphisme canonique*

$$q_{a,+}\circ i^+_{a,T}\circ f_{H,T',!}(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} p_{T',!}\circ\rho_a^+(\mathcal{E}').$$

Démonstration. — On utilise 3.1.12 et la commutation de l'image directe extraordinaire à la cohomologie locale (version "dualisée" de 2.2.17.2). □

Il résulte du lemme 3.3.9 que l'on a :

$$L(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t) = \prod_{a\in\mathbb{A}^{1\,0}_k}\prod_j \det{}_K(1 - tF_{|\mathcal{H}^j(p_{T',!}(\rho_a^+(\mathcal{E}')))})^{(-1)^{1+j}} =: \prod_{a\in\mathbb{A}^{1\,0}_k} P(U'_a,\rho_a^+(\mathcal{E}'),t).$$

De plus, comme $\dim(U'_a) < \dim U' = \dim U$ (car g est lisse), par hypothèse de récurrence on obtient la relation $P(U'_a,\rho_a^+(\mathcal{E}'),t) = L(U'_a,\rho_a^+(\mathcal{E}'),t)$. Or,

$$\prod_{a\in\mathbb{A}^{1\,0}_k} L(U'_a,\rho_a^+(\mathcal{E}'),t) = \prod_{a\in\mathbb{A}^{1\,0}_k} L(U'_a,\mathcal{E}',t) = L(U',\mathcal{E}',t).$$

D'où $L(\mathbb{A}^1_k,f_{H,T',!}(\mathcal{E}'),t) = L(U',\mathcal{E}',t)$. □

Corollaire 3.3.10. — *Soient $f : \mathfrak{X}_2 \to \mathfrak{X}_1$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et lisses et pour $i = 1, 2$, Z_i un sous-schéma fermé de X_i et et T_i un diviseur de X_i. On note $U_1 = Z_1 \setminus T_1$ et $U_2 = Z_2 \setminus T_2$. Pour tout complexe $\mathcal{E}_2 \in F\text{-}\mathfrak{C}^{\vee}_{\mathfrak{X}_2,T_2,Z_2}$, on a l'égalité :*

$$L(U_2,\mathcal{E}_2,t) = L(U_1,f_{T_1,T_2,!}(\mathcal{E}_2),t).$$

Démonstration. — Cette égalité est claire lorsque L est remplacée par P. Le théorème 3.3.8 nous permet de conclure. □

Références

[Ber] P. Berthelot – "$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. III. Images directes et inverses", en cours de rédaction.

[Ber96a] P. Berthelot – "$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272.

[Ber96b] ______, "Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 1, p. 35–40.

[Ber96c] P. Berthelot – "Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre", Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes, 1996.

[Ber00] P. Berthelot – "$\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius", *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2000), no. 81, p. vi+136.

[Ber02] ______, "Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules", *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II.

[BGK+87] A. Borel, P.-P. Grivel, B. Kaup, A. Haefliger, B. Malgrange & F. Ehlers – *Algebraic D-modules*, Academic Press Inc., Boston, MA, 1987.

[Cara] D. Caro – "Cohérence différentielle des F-isocristaux unités", A paraître aux C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.

[Carb] ______, "Dévissage des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques en isocristaux surconvergents", en cours de rédaction.

[Car02] D. Caro – "Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques", Thèse, Université de Rennes1, 2002.

[Car03] D. Caro – "Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes", Preprint of Dipartimento di Matematica pura ed applicata di Padova, n^0 1, 2003.

[ÉLS93] J.-Y. Étesse & B. Le Stum – "Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. I. Interprétation cohomologique", *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 557–576.

[ÉLS97] ______, "Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents. II. Zéros et pôles unités", *Invent. Math.* **127** (1997), no. 1, p. 1–31.

[Har66] R. Hartshorne – *Residues and duality*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Huy53] C. Huyghe – "Finitude de la dimension cohomologique de la complétée faible de l'algèbre de Weyl et du faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques à coefficients surconvergents le long d'un diviseur", Université de Rennes I, IRMAR 01-53.

[Huy95] ______, "Construction et étude de la Transformée de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques", Thèse, Université de Rennes1, 1995.

[Sai89] M. Saito – "Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes", *Bull. Soc. Math. France* **117** (1989), no. 3, p. 361–387.

[Vir00] A. Virrion – "Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques", *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 1, p. 1–68.

D. CARO, The University of Sydney, School of Mathematics and Statistics, NSW 2006 AUSTRALIA
E-mail : caro@maths.usyd.edu.au • *Url :* http://www.maths.usyd.edu.au:8000/u/caro/