Surcohérence : holonomie des F-isocristaux unités

Overcoherence : holonomicity of unit-root F-isocrystals

Daniel Caro [a]

[a] *School of Mathematics and Statistics F07, University of Sydney NSW 2006, AUSTRALIA*

Abstract

Let $\mathcal{V}$ be a mixed characteristic complete discrete valuation ring, $\mathcal{P}$ a smooth formal scheme over $\mathcal{V}$, P its special fiber, X a smooth subscheme of P, T a divisor in P such that $T_X = T \cap X$ is a divisor in X. We prove that the unit-root F-isocrystals on $X \setminus T_X$ overconvergent along T_X are holonomic. Furthermore, we show that the stability of the holonomicity by extraordinary inverse image imply the stability of the holonomicity by the directe image of a proper morphism.

Résumé

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, P sa fibre spéciale, X un sous-schéma fermé lisse de P, T un diviseur de P tel que $T_X = T \cap X$ soit un diviseur de X. Nous prouvons que les F-isocristaux unités sur $X \setminus T_X$ surconvergents le long de T_X sont holonomes. De plus, nous montrons que la stabilité de l'holonomie par image inverse extraordinaire implique celle par l'image directe d'un morphisme propre.

Tout au long de cet article, nous garderons les notations suivantes : les schémas formels seront notés par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par les lettres romanes correspondantes. De plus, $\mathcal{V}$ désigne un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$ et de corps de fractions K de caractéristique 0. On note $s \geq 1$ un entier naturel et F la puissance s-ième de l'endomorphisme de Frobenius.

On se donne $\mathcal{P}$ un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, X un sous-schéma fermé k-lisse de P et T un diviseur de P tel que $T_X := T \cap X$ soit un diviseur de X. On notera $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ le « complété faible »du faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{P}$ à coefficients surconvergents le long de T et $({}^{\dagger}T)$ désignera l'extension $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}} -$.

Quoique l'holonomie des F-isocristaux surconvergents sur les courbes lisses soit prouvée ([5, 4]), sur des schémas plus généraux nous ne disposions toujours pas d'exemples non-triviaux de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques holonomes (les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-modules associés via [3, 2.5] aux F-isocristaux convergents sur un sous-schéma fermé lisse de P sont les cas triviaux). Afin de prouver l'holonomie de $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ et plus généralement celle des F-isocristaux unités sur $X \setminus T_X$ surconvergents le long de T_X, il s'agit de donner un critère d'holonomie faisant intervenir la surcohérence, notion stable par l'image directe d'un morphisme propre ([4, 3.1.9]) et qui permet donc de faire de la descente (voir 1.5). C'est ce que nous ferons dans la première partie.

Email address: caro@maths.usyd.edu.au (Daniel Caro).

Soit $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. En reprenant ses notations, Berthelot conjecture dans [2, 5.3.6]) les propriétés suivantes sur la stabilité de l'holonomie :

A) Si $\mathcal{E}$ est un objet de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ et est à support propre sur $\mathcal{Y}$, alors l'image directe $f_{+}(\mathcal{E})$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$.

B) Si $\mathcal{F}$ est un objet de $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{Y},\mathbb{Q}})$, alors l'image inverse extraordinaire $f^{!}(\mathcal{F})$ appartient à $F\text{-}D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$.

Nous prouvons dans la deuxième partie de cette Note que la Conjecture *B* implique la Conjecture *A*.

1. Un critère d'holonomie

Définition 1.1 Un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est dit à *fibres extraordinaires finies* si, pour tout point fermé x de P, pour tout relèvement i_x de l'immersion fermée induite par x, les espaces de cohomologie de $i_x^{!}(\mathcal{E})$ sont des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Puisque la *surcohérence* ([4, 3.1.1]) est préservée par image inverse extraordinaire ([4, 3.1.7]), on remarque qu'un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module surcohérent est à fibres extraordinaires finies.

Lemme 1.2 *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module cohérent à fibres extraordinaires finies. En notant Z, le sous-schéma fermé réduit de P définissant son support, il existe un ouvert affine $\mathfrak{U}$ de $\mathcal{P}$, tel que $Z \cap U$ soit lisse et dense dans Z et tel que la restriction de $\mathcal{E}$ sur $\mathfrak{U}$, $\mathcal{E}_{|\mathfrak{U}}$, soit associée via [3, 2.5] à un isocristal convergent sur Y. En particulier, si $\mathcal{E}$ est muni d'une structure de Frobenius alors $\mathcal{E}_{|\mathfrak{U}}$ est holonome.*

Preuve.– Cela résulte de l'analogue du théorème de Kashiwara dû à Berthelot ([2, 5.3.3]) et de [5, 2.2.9]. □

Lemme 1.3 *En notant $\mathbb{D}$, le foncteur dual $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-linéaire ([10, I.3.2]), pour tout F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est holonome. De plus, $\mathcal{H}^0\mathbb{D}\circ\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de $\mathcal{E}$ qui soit holonome.*

Preuve.– La première assertion dérive de [10, III.2.4.(ii)], tandis que la deuxième résulte de la preuve de [10, III.3.6] (en remarquant aussi, grâce à [10, III.2.4] et [10, III.3.1], que $\mathcal{H}^0\mathbb{D}\circ\mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est le dernier terme de la filtration décroissante induite par la suite spectrale $\mathcal{H}^r\mathbb{D}\circ\mathcal{H}^r\mathbb{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{E}$). □

Proposition 1.4 *Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Si les espaces de cohomologie de $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ sont à fibres extraordinaires finies (par exemple si $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P},\mathbb{Q}}$-surcohérent), alors $\mathcal{E}$ est holonome.*

Preuve.– Pour tout entier l, notons $\mathcal{F}_l := \mathcal{H}^l\mathbb{D}(\mathcal{E})$. Pour l différent de 0, désignons par Z_l le support de $\mathcal{F}_l$ et Z la réunion des sous-schémas fermés Z_l. Par l'absurde (critère d'holonomie [10, III.4.2]), supposons que Z ne soit pas vide. Comme pour tout l, les $\mathcal{F}_l$ sont à fibres extraordinaires finies, grâce à 1.2, il existe un diviseur H de P ne contenant pas Z tel que $U = Z \setminus H$ soit affine et lisse et tel que, pour tout $l \neq 0$, les faisceaux $\mathcal{F}_{l|\mathcal{P}\setminus H}$ soient holonomes. Comme $\mathcal{F}_0$ est holonome (1.3), il en résulte que le complexe $\mathbb{D}(\mathcal{E})_{|\mathcal{P}\setminus H}$ est holonome, ce qui est équivalent à dire que $\mathcal{E}_{|\mathcal{P}\setminus H}$ est holonome. Pour tout entier $l \neq 0$, il en résulte que $\mathcal{F}_{l|\mathcal{P}\setminus H} = 0$. Contradiction. □

Proposition 1.5 *Soit $p : X' \to X$ un morphisme projectif et surjectif de k-schémas lisses tel que l'image inverse de T_X par p soit un diviseur de X'. Alors, pour tout isocristal E sur $X \setminus T_X$ surconvergent le long de T_X, le faisceau $\mathrm{sp}_{+}(E)$ (resp. $\mathbb{D}\mathrm{sp}_{+}(E)$), construit dans [3, 2.5], est cohérent si et seulement si l'isocristal $p^*(E)$ vérifie la propriété analogue. De même, en remplaçant « cohérent »par « surcohérent ».*

Preuve.– On reprend les arguments de la preuve de [3, 3.1.(iii)]. □

Théorème 1.6 *Soit $\mathcal{E}$ le F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-module associé à un F-isocristal unité sur $X \setminus T_X$ surconvergent le long de T_X. Alors $\mathcal{E}$ et $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ sont $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{P},\mathbb{Q}}$-surcohérents. En particulier, $\mathcal{E}$ est holonome.*

Preuve.– On sait déjà que $\mathcal{E}$ est surcohérent ([4, 3.1.2.2]). Il reste à prouver que $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est surcohérent. L'assertion étant locale en $\mathfrak{P}$, l'analogue du théorème de Kashiwara nous permet de supposer que $X = P$. On notera donc $\mathfrak{X}$ à la place de $\mathfrak{P}$ et T à la place de T_X. Grâce au théorème de monodromie finie de Tsuzuki ([9, 1.3.1]), au théorème de désingularisation de de Jong ([6]) et à la Proposition 1.5, on se ramène au cas où T est un diviseur à croisements normaux et où il existe un F-isocristal convergent G sur X, tel que $({}^{\dagger}T)(\mathrm{sp}_+(G)) \tilde{\rightarrow} \mathcal{E}$. Avec l'aide des triangles distingués de Mayer-Vietoris ([4, 2.2.16]), on peut en outre supposer que T est lisse. De plus, le théorème étant local en $\mathfrak{X}$, il ne coûte rien de supposer que $T \hookrightarrow X$ se relève en une immersion fermée de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses $u : \mathfrak{T} \hookrightarrow \mathfrak{X}$. Or, en notant $\mathcal{G} = \mathrm{sp}_+(G)$, comme $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{T}(\mathcal{G}) \tilde{\rightarrow} u_+ u^!(\mathcal{G})$ ([2, 4.4.5]), le triangle de localisation (lire [2, 5.3.6]) de $\mathcal{G}$ en T s'écrit :

$$u_+ u^!(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow u_+ u^!(\mathcal{G})[1].$$

De plus, grâce au théorème de dualité relative ([11, II.5.4]), à [3, 2.7] et à [7, 1.5.3], les faisceaux $\mathbb{D}(\mathcal{G})$ et $\mathbb{D}(u_+ u^!(\mathcal{G}))$ sont surcohérents. Le triangle de localisation de $\mathcal{G}$ en T nous permet de conclure que $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est surcohérent. □

2. Conjectures sur la stabilité de l'holonomie

Soit $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses. Considérons la Conjecture suivante :
A') Si f est propre et $\mathcal{E}$ est un objet de F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, alors $f_+(\mathcal{E})$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$.

Proposition 2.1 *Les Conjectures A' et B impliquent la Conjecture A.*

Preuve.– Soit $\mathcal{E}$ un objet de F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ à support propre sur $\mathfrak{Y}$. Par récurrence sur la dimension du support Z de $\mathcal{E}$, prouvons que $f_+(\mathcal{E})$ appartient à F-$D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{hol}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{Y},\mathbb{Q}})$. Il ne coûte rien de supposer que $\mathcal{E}$ est réduit à un terme et, grâce aux triangles distingués de Mayer-Vietoris, on se ramène au cas où Z est intègre. Avec l'aide du théorème de désingularisation de de Jong ([6]), il existe un morphisme projectif $g : \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, $h : Z' \rightarrow Z$ un morphisme surjectif, projectif génériquement fini et étale tel que Z' soit lisse, deux immersions fermées $i : Z \hookrightarrow \mathfrak{X}$, $i' : Z' \hookrightarrow \mathfrak{X}'$ telles que $g \circ i' = i \circ h$. Soit T un diviseur de X tel que $Z \setminus T$ soit affine et lisse, $\dim Z \cap T < \dim Z$, le morphisme $Z' \setminus h^{-1}(T) \rightarrow Z \setminus T$ soit fini et étale et la restriction de $\mathcal{E}$ sur l'ouvert $\mathfrak{X} \setminus T$ soit associée à un isocristal convergent sur $Z \setminus T$ (grâce à 1.2). Par récurrence, il s'agit alors de vérifier l'holonomie de $f_+(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$. Or, via [11, II.5.4 et II.5.5], on dispose des morphismes $g_+ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^!(({}^{\dagger}T)\mathcal{E}) \rightarrow ({}^{\dagger}T)\mathcal{E}$ et $({}^{\dagger}T)\mathcal{E} \rightarrow g_+ \mathbb{D} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^! \mathbb{D}(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$. Il découle de [5, 2.2.8] et de [2, 5.3.3] que les complexes $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^!(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$ et $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^! \mathbb{D}(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$ sont chacun associés (via le foncteur sp_+ défini dans [3, 2.5]) à un F-isocristal sur $Z' \setminus h^{-1}(T)$ surconvergent le long de $h^{-1}(T)$. Grâce à Kedlaya ([8, p. 2, l. 2]), on sait que le foncteur restriction qui à un F-isocristal sur $Z' \setminus h^{-1}(T)$ surconvergent le long de $h^{-1}(T)$ associe le F-isocristal convergent sur $Z' \setminus h^{-1}(T)$ correspondant est pleinement fidèle. Il en résulte que $\mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^!(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$ et $\mathbb{D} \circ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^! \mathbb{D}(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$ sont isomorphes. Or, le morphisme composé déduit $({}^{\dagger}T)\mathcal{E} \rightarrow g_+ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^!(({}^{\dagger}T)\mathcal{E}) \rightarrow ({}^{\dagger}T)\mathcal{E}$ est un isomorphisme en dehors de T. Il découle de [1, 4.3.12] que celui-ci est un isomorphisme. On en déduit que $f_+(({}^{\dagger}T)\mathcal{E})$ est facteur direct de $f_+(g_+ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^!(({}^{\dagger}T)\mathcal{E}))$. Or, comme Z' est k-lisse et propre sur $\mathfrak{Y}$, il résulte de la Conjecture A' (grâce aussi à la suite spectrale de Cech d'un recouvrement d'ouverts *affines* de $\mathfrak{X}'$) que $f_+(g_+ \mathbb{R}\underline{\Gamma}^{\dagger}_{Z'} g^!(({}^{\dagger}T)\mathcal{E}))$ est holonome. □

Proposition 2.2 *Considérons les quatre assertions suivantes :*

(i) La Conjecture B est validée ;

(ii) Un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est holonome si et seulement s'il est surcohérent ;

(iii) Un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est holonome si et seulement s'il est à fibres extraordinaires finies ;

(iv) Un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est holonome si et seulement s'il est pseudo-holonome (voir [5, 2.2.1]).

On a les relations : $i) \Leftrightarrow ii)$ et $i) \Rightarrow iii) \Leftrightarrow iv)$.

Preuve.– L'implication $ii) \Rightarrow i)$ résulte de la stabilité par image inverse extraordinaire de la surcohérence ([4, 3.1.7]). Maintenant, supposons $i)$ vraie et déduisons-en $iii)$. Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Par hypothèse, si $\mathcal{E}$ est holonome alors $\mathcal{E}$ est à fibres extraordinaires finies. Réciproquement, supposons que $\mathcal{E}$ soit à fibres extraordinaires finies et prouvons par récurrence sur la dimension de son support, noté Z, que celui-ci est holonome. D'après 1.3, $\mathcal{E}' := \mathcal{H}^0\mathbb{D} \circ \mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de $\mathcal{E}$ qui soit holonome. Grâce à [2, 5.3.5(ii)], il suffit alors de prouver l'holonomie de $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$. Or, la Conjecture B étant vérifiée, $\mathcal{E}'$ est à fibres extraordinaires finies et donc il en est de même de $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$. Par hypothèse de récurrence, il suffit alors vérifier que la dimension du support de $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ est strictement inférieure à celle de Z. Or, on déduit de 1.2 que l'inclusion $\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$ est un isomorphisme au dessus d'un ouvert $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$ induisant un ouvert dense de Z. Par conséquent, $\mathcal{E}/\mathcal{E}'$ est nulle au dessus de $\mathfrak{U}$ et son support est de dimension strictement inférieure à celle de Z.

L'implication $i) \Rightarrow ii)$ se prouve de manière analogue à $i) \Rightarrow iii)$ tandis que $iii) \Leftrightarrow iv)$ est tautologique. □

Théorème 2.3 *La Conjecture B implique la Conjecture A.*

Preuve.– Cela résulte des Propositions 2.1 et 2.2 et du fait que la surcohérence se préserve par l'image directe d'un morphisme propre ([4, 3.1.9]). □

Remerciements. Je remercie B. Le Stum et A. Virrion pour leur intérêt très stimulant et leurs conseils relatifs à ces travaux.

Références

[1] P. Berthelot, $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 29 (2) (1996) p. 185–272.

[2] P. Berthelot, Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules, in : Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques, II, in : Astérisque, vol. (279), 2002, 1–80.

[3] D. Caro, Cohérence différentielle des F-isocristaux unités, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 338 (2004) 145-150.

[4] D. Caro, $\mathcal{D}$-modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L, Preprint of the University of Sydney, 2003.

[5] D. Caro, Fonctions L associées aux $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Cas des courbes, Preprint, 1, Dipartimento di Matematica pura ed applicata di Padova, 2003.

[6] A. J. de Jong Smoothness, semi-stability and alterations, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 83, (1996) 51–93.

[7] C. Huyghe, Construction et étude de la Transformée de Fourier pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, Thèse, Université de Rennes I, 1995.

[8] K.S. Kedlaya, Full faithfulness for overconvergent F-isocrystals, arXiv :math.AG/0110125, 2003.

[9] N. Tsuzuki, Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals, Duke Math. J., 111, (3), (2002) 385–418.

[10] A. Virrion, Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, Bull. Soc. Math. France, 128 (1), (2000) 1-68.

[11] A. Virrion, Trace et dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. II$^{\text{ème}}$ partie : Théorème de dualité relative et morphisme d'adjonction, Prépublication IRMAR 00-40, Université de Rennes I, 2000.